



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

SELEZIONE DI PORTAFOGLI OTTIMI
CON VINCOLO DI SHORTFALL

Valentina Guizzi

Working paper n. 37
2004



I Working Papers del Dipartimento di Economia svolgono la funzione di divulgare tempestivamente, in forma definitiva o provvisoria, i risultati di ricerche scientifiche originali. La loro pubblicazione è soggetta all'approvazione del Comitato Scientifico.

Per ciascuna pubblicazione vengono soddisfatti gli obblighi previsti dall'art.1 del D.L.L. 31.8.1945, n. 660 e successive modifiche.

Copie della presente pubblicazione possono essere richieste alla Redazione

Università degli Studi di Roma Tre – Dipartimento di Economia
Via Ostiense, 139 – 00154 Roma
Tel. 06-57374003 Fax 06-57374093 E-mail: dip_eco@uniroma3.it

Comitato scientifico

M. Maddalena Barbieri
Alessandra Carleo
Marisa Cenci
Andrea Gheno
Loretta Mastroeni
Julia Mortera
Carlo Mottura

Copyright © MMIII ARACNE EDITRICE S.R.L.
00173 Roma, via Raffaele Garofalo, 133 A/B
(06) 72672222 – (06) 93781065
telefax (06) 72672233

www.aracne-editrice.it
info@aracne-editrice.it

ISBN 88-7999-717-3

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

I edizione: maggio 2004

Finito di stampare nel mese di maggio del 2004
dalla tipografia « Grafica Editrice Romana S.r.l. » di Roma
per conto della « Aracne editrice S.r.l. » di Roma

Selezione di portafogli ottimi con vincolo di shortfall

Valentina Guizzi

Dipartimento di Economia
Università degli studi Roma Tre
guizzi@uniroma3.it

Abstract

In questo lavoro si studia il problema della scelta di un portafoglio ottimo per l'investitore, sotto il vincolo di shortfall. Tale approccio costituisce un metodo alternativo ai modelli più tradizionali nella teoria della selezione di portafogli finanziari. Esso fa uso del concetto di rischio di shortfall che tiene conto solo delle variazioni verso il basso dei rendimenti dei titoli rispetto ad una soglia minima fissata. Ciò sembra meglio adattarsi a come il rischio venga percepito dall'investitore. Diamo, in questo lavoro, l'espressione algebrica della deviazione standard e del rendimento atteso del portafoglio ottimo scelto in ottica di shortfall nonché dell'avversione al rischio dell'individuo che sceglie tale portafoglio. Calcoliamo anche la sensitività dell'avversione al rischio rispetto a variazioni dei parametri che intervengono nell'individuazione del vincolo di shortfall. Calcoliamo infine le curve di livello dell'avversione a rischio sempre rispetto ai parametri di shortfall.

Indice

1. Introduzione	1
2. Analisi rischio-rendimento	2
3. Il portafoglio ottimo con vincolo di shortfall	6
4. Alcune considerazioni di statica comparata del problema	10
5. Conclusioni	14
Bibliografia	14

1 Introduzione

In questo lavoro trattiamo di un problema di selezione di portafoglio, con particolare riferimento alla scelta di un individuo che vuole investire il proprio capitale in parte in titoli rischiosi ed in parte in un titolo certo. L'approccio utilizzato è quello di misurare il rischio a cui è sottoposto l'investitore mediante il *rischio di shortfall*, ovvero l'eventualità di non raggiungere una soglia minima di rendimento che l'investitore considera critica (si veda [LBK]).

Nella teoria del portafoglio il rischio è tradizionalmente misurato dalla varianza (o anche dalla deviazione standard) dei rendimenti; questo approccio ha però il limite di non tener conto della differenza fra variazioni del rendimento verso l'alto o verso il basso. Il fatto che il modello di shortfall prenda in esame soltanto le variazioni del rendimento al di sotto di un certo livello minimo, sembrerebbe meglio riflettere la percezione di rischio dell'investitore.

Utilizzando il modello descritto in [LBK], il vincolo di shortfall è costituito da due elementi: la soglia minima di rendimento che l'investimento deve raggiungere, e la probabilità che il rendimento risulti inferiore a tale livello minimo. Consideriamo la rappresentazione di un portafoglio finanziario nel piano rischio/rendimento, ovvero mediante la deviazione standard ed il valore atteso del rendimento del portafoglio. In tale piano il vincolo di shortfall è individuato da una retta S detta *retta di shortfall* che divide il piano in due regioni, l'una costituita dai portafogli che soddisfano il vincolo di shortfall, ovvero i cui rendimenti attesi siano più bassi della soglia minima di rendimento con probabilità inferiore od uguale alla probabilità di shortfall, l'altra regione composta dai portafogli che non verificano il vincolo.

Nell'ottica di shortfall il punto \bar{P} di intersezione fra la retta di shortfall S e la frontiera efficiente \mathcal{L} , corrisponde al portafoglio ottimo per l'investitore ovvero al portafoglio efficiente che contiene la quantità massima di titoli rischiosi fra quelli che soddisfano il vincolo di shortfall.

Nel paragrafo 2 si introducono brevemente alcuni aspetti dell'analisi media/varianza utilizzata nell'ambito della teoria della selezione di portafogli finanziari (si veda [M] e [HL]). Ci soffermeremo sulle proprietà del modello che si utilizzano nei successivi paragrafi. In particolare daremo la definizione di Capital Market Line e di portafoglio di mercato P_M . Determineremo, in ipotesi di utilità quadratica, la preferenza dell'investitore che sceglie il portafoglio di mercato come portafoglio ottimo. Nel paragrafo

3 descriviamo il modello di shortfall per l'individuazione di un portafoglio ottimo per l'investitore. Daremo la definizione esatta di vincolo di shortfall e la sua rappresentazione nel piano rischio/rendimento. Determineremo il portafoglio ottimo \bar{P} in ipotesi di shortfall ed i parametri che caratterizzano l'utilità attesa dell'individuo in \bar{P} sempre in ipotesi di utilità quadratica. Nel paragrafo 4 si utilizza un'approssimazione quadratica di una generica funzione di utilità dell'investitore e si esprime la misura tradizionale di avversione al rischio di Arrow-Pratt, come funzione dei parametri α ed y_α che rappresentano il vincolo di shortfall. Tali parametri esprimono rispettivamente la probabilità di shortfall e la soglia minima di rendimento. In particolare si studia la sensitività dell'avversione al rischio al variare della probabilità di shortfall e si ottiene che tale misura è una funzione decrescente della probabilità di shortfall se la soglia critica di rendimento y_α è minore del rendimento del titolo certo r_f . Sempre nelle stesse ipotesi si ottiene inoltre che l'avversione al rischio dell'individuo cresce al crescere del livello minimo di rendimento y_α . Nel paragrafo 4 determiniamo inoltre l'equazione delle curve di livello che rappresentano l'insieme dei vincoli di shortfall per cui l'avversione al rischio dell'investitore che sceglie come portafoglio ottimo \bar{P} risulta costante. Si ricava in particolare la curva di livello nel caso in cui $\bar{P} = P_M$.

2 Analisi rischio-rendimento

In questo paragrafo vogliamo brevemente ricordare alcuni aspetti dell'approccio tradizionale a problemi di selezione di portafoglio per mezzo dell'analisi rischio-rendimento (si veda [HL] e [M] per i dettagli).

Consideriamo il problema di un individuo che voglia investire il suo capitale in un portafoglio finanziario. Indichiamo con X il rendimento incerto di un determinato portafoglio ed indichiamo con $E(X)$ e $V(X)$ rispettivamente la media e la varianza della variabile aleatoria X . Consideriamo l'orizzonte temporale come uniperiodale. Per prima cosa è utile ricordare che l'analisi rischio-rendimento (o media-varianza) è un metodo che permette di ridurre un problema di decisione finanziaria in condizioni di incertezza all'individuazione dei soli momenti di primo e second'ordine della variabile aleatoria rendimento, ovvero della media e della varianza di X . In particolare la scelta dell'individuo viene decomposta in due obiettivi: la minimizzazione della varianza $V(X)$ che esprime il rischio del titolo aleatorio in quanto fornisce una misura di quanto il rendimento

si discosti dal valore atteso, e, in un secondo tempo, la massimizzazione del valore atteso $E(X)$ del rendimento. Tutti i modelli media-varianza hanno una loro giustificazione teorica se supponiamo che il rendimento atteso X abbia distribuzione normale. Infatti tali distribuzioni sono univocamente determinate dalla sola media e varianza. Indichiamo inoltre il rendimento certo con r_f e supponiamo che tutti gli individui abbiano *aspettative omogenee* ovvero associno tutti uguale distribuzione di probabilità a ciascun titolo rischioso. La frontiera efficiente dei titoli rischiosi sarà quindi la stessa per tutti gli investitori.

È possibile rappresentare il problema di selezione del portafoglio come un problema di scelta tra punti appartenenti al piano rischio/rendimento (σ, m) , dove sull'asse orizzontale si riporta la deviazione standard del rendimento del portafoglio (che, essendo il quadrato della varianza, esprime anch'essa il rischio di tale portafoglio come misura di quanto il rendimento si discosti dalla media) e sull'asse verticale il valore atteso di tale rendimento.

Sia \mathcal{L} la semiretta uscente dal punto $(0, r_f)$, che rappresenta il titolo non rischioso nel piano rischio/rendimento, e tangente alla frontiera efficiente dei titoli rischiosi (si veda per esempio [L]) ed indichiamo con P_M tale punto di tangenza che è usualmente noto come portafoglio di mercato (si veda la figura 1).

Per il teorema dei due fondi (si veda [HL]), ogni portafoglio efficiente è combinazione lineare del titolo non rischioso e del portafoglio di mercato P_M . Tale retta \mathcal{L} , cioè la frontiera efficiente in presenza del titolo certo, viene detta *Capital Market Line*. La sua equazione è data da:

$$(2.1) \quad m = \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M} \sigma + r_f$$

A questo punto vogliamo determinare i parametri che caratterizzano l'utilità attesa di un investitore che sceglie di investire nel portafoglio di mercato P_M . Ricordiamo che in ipotesi di aspettative omogenee è la funzione di utilità che permette di misurare il grado di avversione al rischio del decisore. Consideriamo che le preferenze dell'individuo siano determinate da una funzione di utilità quadratica di equazione:

$$(2.2) \quad u(x) = x - \frac{a}{2}x^2$$

dove a è un numero reale positivo. Tale funzione di utilità si considera definita nell'intervallo $0 < x < \frac{1}{a}$ in modo che essa risulti monotona

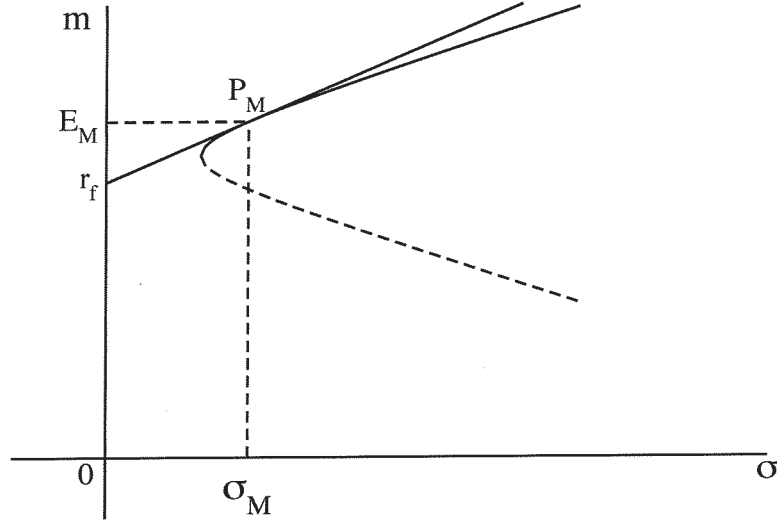


Fig. 1

crescente e concava in tale intervallo. Lo sviluppo di Taylor di $u(x)$ in $m = E(X)$ è :

$$u(x) = u(m) + u'(m)(x - m) + \frac{u''(m)}{2}(x - m)^2$$

Possiamo quindi scrivere l'utilità attesa come $E(u(X)) = m - \frac{a}{2}m^2 - \frac{a}{2}\sigma^2$.

Le curve di indifferenza, che rappresentano il luogo dei punti in cui l'investitore ha la stessa utilità attesa, si esprimono come $E[u(X)] = k$, ovvero $m - \frac{a}{2}m^2 - \frac{a}{2}\sigma^2 = k$.

L'equazione che determina le curve di indifferenza, scritta in forma implicita è data da $F(\sigma, m) = 0$, dove $F(\sigma, m) = m - \frac{a}{2}m^2 - \frac{a}{2}\sigma^2 - k$. Calcolando la derivata parziale di questa funzione rispetto al rendimento atteso m si osserva che $F_m(\sigma, m) = 1 - am$ e quindi $F_m(\sigma, m) \neq 0$ se e soltanto se $m \neq \frac{1}{a}$, che è senz'altro vero nell'intervallo $0 < x < \frac{1}{a}$. Possiamo quindi applicare il teorema della funzione implicita e concludere che esiste una funzione $\psi_{k,a}(\sigma)$ tale che $F(\sigma, \psi_{k,a}(\sigma)) = 0$. L'equazione delle curve di indifferenza scritta in forma esplicita risulta allora essere $m = \psi_{k,a}(\sigma)$.

Si ha inoltre che $\frac{dm}{d\sigma} = \psi'(\sigma) = -\frac{F_\sigma}{F_m}$ e quindi:

$$(2.3) \quad \frac{dm}{d\sigma} = \frac{a\sigma}{1 - am}$$

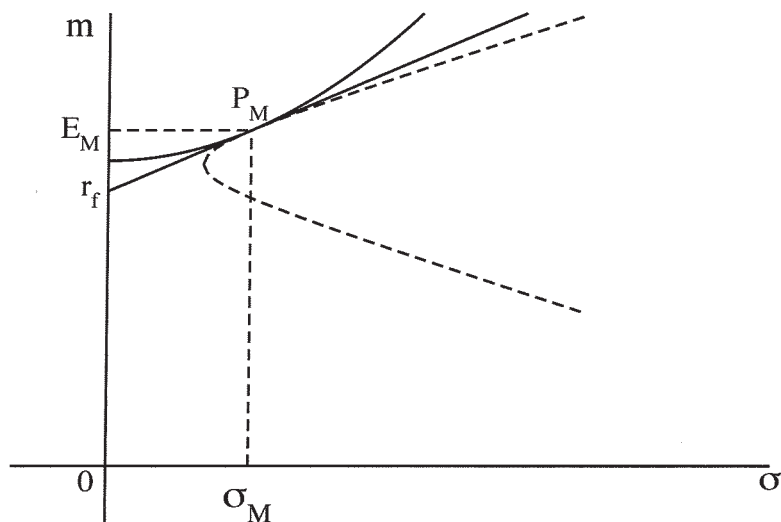


Fig. 2

Per quanto visto fin'ora è semplice calcolare il valore del parametro a nell'equazione (2.2) che caratterizza la funzione di utilità di un individuo che sceglie come portafoglio ottimo il portafoglio di mercato.

Osserviamo infatti che l'utilità attesa in P_M è rappresentata nel piano rischio/rendimento dalla curva di indifferenza passante per tale punto e tangente alla Capital Market Line come in figura 2.

È sufficiente osservare che, per la (2.1) e (2.3), la condizione di tangenza fra la CML \mathcal{L} e la curva di indifferenza per P_M è data da:

$$\frac{a\sigma_M}{1 - aE_M} = \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M}$$

Un calcolo diretto permette di scrivere la precedente identità come:

$$(2.4) \quad a_M = \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M^2 + E_M^2 - E_M r_f}$$

dove abbiamo indicato con a_M il valore del parametro a che volevamo determinare.

3 Il portafoglio ottimo con vincolo di shortfall

In questo paragrafo descriveremo un metodo per la determinazione di un portafoglio finanziario che massimizzi il rendimento di investimenti rischiosi sotto vincolo di shortfall (si veda [LBK]). Tale modello si utilizza con le seguenti due ipotesi: supporremo che i rendimenti dei titoli abbiano una distribuzione normale ed inoltre che tutti gli individui abbiano aspettative omogenee.

Il nuovo approccio consiste nel misurare il rischio come la probabilità di non raggiungere una soglia minima di rendimento dell'investimento. In particolare, data una probabilità α ed una costante positiva k , il vincolo di shortfall $\mathcal{S}_{\alpha,k}$ consiste nel richiedere che *il rendimento del portafoglio sia inferiore a k con una probabilità minore o uguale ad α* .

Vogliamo far vedere che il vincolo di shortfall può essere rappresentato da una retta \mathcal{S} nel piano rischio/rendimento (σ, m) introdotto nel precedente paragrafo. Sia $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ la densità normale standard $N(0, 1)$ e $g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ la densità normale non standard $N(m, \sigma^2)$. Siano inoltre Φ_f e Φ_g le funzioni di distribuzione rispettivamente di una legge normale $N(0, 1)$ e $N(m, \sigma^2)$ ovvero:

$$(3.0.1) \quad \Phi_g(y) = \int_{-\infty}^y g(t)dt$$

e

$$(3.0.2) \quad \Phi_f(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Data una probabilità α , denotiamo con x_α ed y_α i quantili di ordine α di una legge $N(0, 1)$ ed $N(m, \sigma^2)$ rispettivamente. Per definizione valgono quindi le due relazioni $\Phi_f(x_\alpha) = \alpha$ e $\Phi_g(y_\alpha) = \alpha$ come rappresentato in figura 3a e 3b.

Con un cambiamento di variabile è possibile scrivere la seconda delle due relazioni come $\Phi_f(\frac{y_\alpha - m}{\sigma}) = \alpha$. Da quest'ultima, per l'iniettività della funzione di distribuzione, segue che

$$x_\alpha = \frac{y_\alpha - m}{\sigma}$$

e quindi

$$(3.1) \quad m = -x_\alpha\sigma + y_\alpha.$$

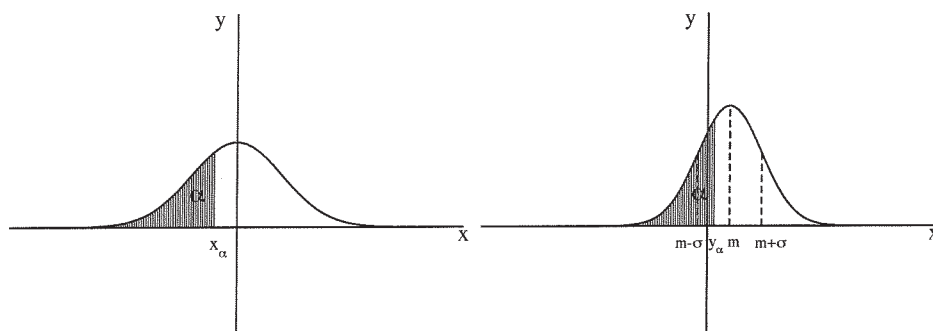


Fig. 3a

Fig. 3b

Quest'ultima relazione rappresenta nel piano rischio/rendimento l'equazione di una retta \mathcal{S} detta *retta di shortfall*. Se si osserva che $\Phi_f(y) = P(X \leq y)$ risulta chiaro che è possibile esprimere tramite la retta \mathcal{S} il vincolo di shortfall $\mathcal{S}_{\alpha, y_\alpha}$ di parametri (α, y_α) . Infatti la retta \mathcal{S} divide il piano (σ, m) in due regioni: il semipiano superiore chiuso che rappresenta tutti i portafogli che soddisfano il vincolo di shortfall, ed il semipiano inferiore aperto che rappresenta tutti i portafogli che non soddisfano tale vincolo.

Osserviamo ora che se $\alpha = 0.5$, ovvero se la probabilità di shortfall è del 50%, si ha che $x_\alpha = 0$. Da ciò segue che l'equazione (3.1) diventa $m = 0$ e quindi \mathcal{S} risulta essere una retta orizzontale. In generale possiamo osservare che la pendenza della retta \mathcal{S} è data da $-x_\alpha$, per cui \mathcal{S} ha pendenza positiva se e soltanto se $x_\alpha \leq 0$ ovvero se e soltanto se $\alpha < 0.5$. Ciò è equivalente a richiedere che la probabilità di shortfall α sia minore o uguale del 50%. In caso contrario la retta di shortfall avrà pendenza negativa. Osserviamo che nel caso di nostro interesse è naturale richiedere che la probabilità di shortfall sia minore o uguale del 50% e quindi supporre la retta \mathcal{S} con pendenza non negativa.

Osserviamo inoltre che la pendenza di \mathcal{S} aumenta al decrescere di α da 0.5 a 0. Ci vuol dire che la retta di shortfall è tanto più ripida quanto più la probabilità di shortfall α diminuisce. È utile notare che al decrescere di α il vincolo di shortfall si fa più restrittivo a parità della soglia minima di rendimento y_α fissata.

Denotiamo ora con $\bar{P} = (\bar{\sigma}, \bar{E})$ il punto nel piano rischio/rendimento che corrisponde al portafoglio ottimo sotto il vincolo di shortfall. Tale punto si ottiene come intersezione fra la retta di shortfall \mathcal{S} e la Capital Market Line \mathcal{L} definita nel paragrafo 2. Ricordando la (3.1) e la (2.1), \bar{P} si determina come la soluzione del seguente sistema nelle incognite σ e m :

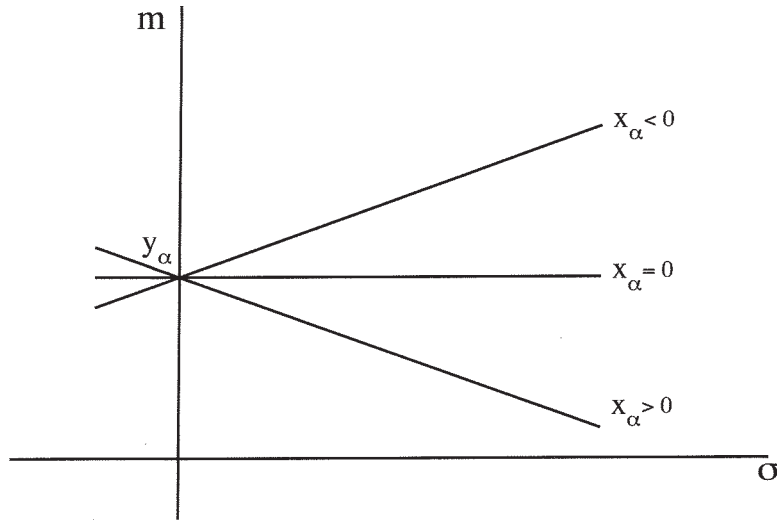


Fig. 4

$$\begin{cases} m = \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M} \sigma + r_f \\ m = -\sigma x_\alpha + y_\alpha \end{cases}$$

dove $P^M = (\sigma_M, E_M)$ è il portafoglio di mercato definito nel precedente paragrafo. Osserviamo che tale sistema ammette un'unica soluzione se e soltanto se le due rette \mathcal{L} ed \mathcal{S} sono incidenti, ovvero se il determinante della matrice dei coefficienti associata è non nullo. Tale condizione si può scrivere come $E_M - r_f + x_\alpha \sigma_M \neq 0$.

Sotto tale ipotesi la soluzione del sistema è data da

$$(3.2) \quad \begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{\sigma_M (y_\alpha - r_f)}{E_M - r_f + x_\alpha \sigma_M} \\ \bar{E} = -x_\alpha \bar{\sigma} + y_\alpha \end{cases}$$

Alcune considerazioni geometriche permettono di dedurre che $\bar{\sigma} > 0$ se e soltanto se $y_\alpha \neq r_f$. Osserviamo infatti (si veda la figura 5b) che le quantità $E_M - r_f$ e $-x_\alpha \sigma_M = \bar{E}_M - y_\alpha$ esprimono l'incremento subito dal rendimento m del punto P di coordinate (σ, m) al variare di σ da 0 a σ_M , incremento calcolato rispettivamente lungo la Capital Market Line e la

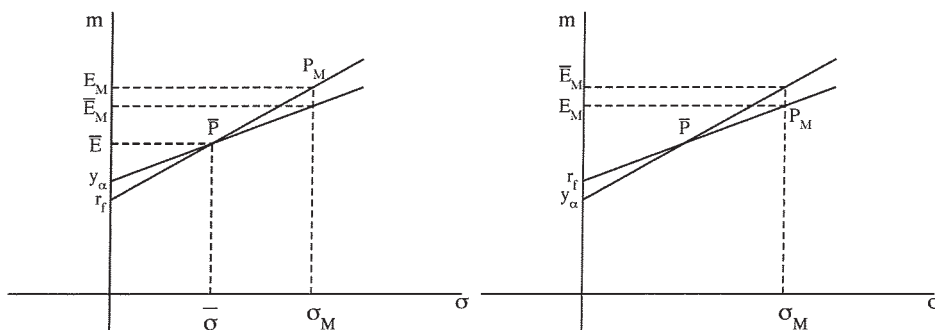


Fig. 5a

Fig. 5b

retta di shortfall. Risulta quindi chiaro che se $y_\alpha < r_f$ perchè le rette siano incidenti la retta di shortfall deve avere pendenza maggiore della retta \mathcal{L} e quindi si ha $E_M - r_f + x_\alpha \sigma_M = E_M - r_f - (\bar{E}_M - y_\alpha) < 0$ ovvero dalla (3.2) segue che $\bar{\sigma} > 0$. Analogamente nel caso in cui $y_\alpha > r_f$ il denominatore della (3.2) avrà anch'esso segno positivo perchè la retta di shortfall ha in tal caso pendenza minore della retta \mathcal{L} (si veda la figura 5a). Osserviamo inoltre che nel caso in cui $y_\alpha = r_f$ l'intersezione delle due rette incidenti è il punto di coordinate $(0, r_f)$, ovvero l'investitore sceglie di investire nel titolo non rischioso r_f .

Vogliamo ora determinare i parametri che caratterizzano l'utilità attesa in \bar{P} sotto l'ipotesi che la funzione di utilità di un individuo che sceglie come portafoglio ottimo \bar{P} sia quadratica di equazione data dalla (2.2). Per fare ciò dobbiamo richiedere che la curva di indifferenza passante per \bar{P} sia tangente in tale punto alla Capital Market Line \mathcal{L} . Ricordando la (2.3) e l'equazione (2.1) della retta \mathcal{L} possiamo scrivere tale condizione di tangenza in \bar{P} come:

$$\frac{dm}{d\sigma} = \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M}$$

e quindi

$$(3.3) \quad \frac{a\bar{\sigma}}{1 - a\bar{E}} = \frac{(E_M - r_f)}{\sigma_M}$$

Sia ora $\Delta_M = E_M - r_f$. Tenendo conto della (3.2), la relazione (3.3) diventa:

$$\frac{a}{1 - a\bar{E}} \cdot \frac{\sigma_M(y_\alpha - r_f)}{\Delta_M + x_\alpha \sigma_M} = \frac{\Delta_M}{\sigma_M}$$

Per la (3.2) possiamo sostituire in quest'ultima relazione $\bar{E} = -x_\alpha \bar{\sigma} + y_\alpha$ e quindi, ricordando anche l'espressione di $\bar{\sigma}$ data sempre dalla (3.2), possiamo con semplici calcoli arrivare a determinare dalla precedente relazione il parametro a come:

$$(3.4) \quad a = \frac{\Delta_M^2 + \Delta_M x_\alpha \sigma_M}{y_\alpha (\sigma_M^2 + \Delta_M^2) + \Delta_M \sigma_M r_f x_\alpha - r_f \sigma_M^2}$$

Considerazioni geometriche analoghe a quelle che seguono la (3.2) permettono di dedurre che il denominatore della (3.4) è non nullo. A tale scopo poniamo per semplicità $B = y_\alpha (\sigma_M^2 + \Delta_M^2) + \Delta_M \sigma_M r_f x_\alpha - r_f \sigma_M^2$. Osserviamo quindi che, se $y_\alpha < r_f$, segue immediatamente che $B < r_f \Delta_M (\Delta_M + \sigma_M x_\alpha)$. Tenendo conto che Δ_M è sempre positivo perchè la retta \mathcal{L} ha pendenza positiva, si deduce che $B < 0$ se $\Delta_M + \sigma_M x_\alpha < 0$. Quest'ultima disuguaglianza è vera in quanto le due rette \mathcal{S} ed \mathcal{L} sono incidenti e quindi la retta di shortfall deve avere pendenza maggiore della Capital Market Line (si veda anche la figura 5b). Abbiamo quindi mostrato in particolare che $B \neq 0$ quando $y_\alpha < r_f$. Considerazioni analoghe permettono di dedurre che $B \neq 0$ anche quando $y_\alpha > r_f$, infatti in tal caso si ha che $B > r_f \Delta_M (\Delta_M + \sigma_M x_\alpha)$ e quest'ultima quantità risulta essere positiva.

Si può anche osservare che il parametro a è sempre positivo in quanto

$$a = \frac{\Delta_M (\Delta_M + x_\alpha \sigma_M)}{y_\alpha (\sigma_M^2 + \Delta_M^2) + \Delta_M \sigma_M r_f x_\alpha - r_f \sigma_M^2}$$

Appare quindi evidente che se $y_\alpha < r_f$ per quanto appena osservato il denominatore in tale espressione è negativo ma tale risulta essere anche il numeratore il cui segno è quello dell'espressione $\Delta_M + x_\alpha \sigma_M$, da cui segue la positività del parametro a . Analogamente si osserva che se $y_\alpha > r_f$ sia il numeratore che il denominatore sono positivi e quindi anche a .

Più precisamente le precedenti considerazioni permettono anche di concludere che se $y_\alpha < r_f$ allora $a > \frac{\Delta_M (\Delta_M + x_\alpha \sigma_M)}{r_f \Delta_M (\Delta_M + x_\alpha \sigma_M)}$ e quindi $a > \frac{1}{r_f}$. Se viceversa $y_\alpha > r_f$ si ottiene analogamente che $a < \frac{1}{r_f}$.

4 Alcune considerazioni di statica comparata del problema

Consideriamo ora che le preferenze dell'investitore siano espresse tramite una funzione di utilità $U(x)$. Dalla teoria dell'utilità sappiamo che se

indichiamo con c il capitale dell'investitore e consideriamo lo sviluppo di Taylor della funzione di utilità $U(x)$ di punto iniziale c , arrestato al second'ordine, possiamo approssimare la funzione $U(x)$ con una funzione quadratica che risulta essere una trasformazione lineare crescente della seguente funzione anch'essa quadratica:

$$u(c+x) = x - \frac{r(c)}{2}x^2$$

dove $r(c)$ è la misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt definita come $r(c) = -\frac{U''(c)}{U'(c)}$. La relazione lineare fra le due funzioni quadratiche implica che ad entrambe le funzioni sia associato lo stesso ordine di preferenza dell'investitore. In tal modo si approssima una qualunque funzione di utilità con una funzione quadratica di equazione (2.2), dove $a = r(c)$ specifica l'avversione al rischio dell'investitore che possiede il capitale certo c .

Nel nostro caso supponiamo che l'utilità sia calcolata sulla variabile aleatoria che rappresenta il rendimento dell'investimento aleatorio e che il capitale sia investito in quantità λ nel titolo certo r_f e in quantità $1 - \lambda$ nel portafoglio di mercato. Pertanto per ogni determinazione r_M della variabile aleatoria \tilde{r}_M che esprime il rendimento del portafoglio di mercato si potrà scrivere che:

$$u(\lambda r_f + (1 - \lambda)r_M) = (1 - \lambda)r_M - \frac{r(\lambda r_f)}{2}[(1 - \lambda)r_M]^2$$

In corrispondenza del portafoglio \bar{P} , selezionato con vincolo di shortfall, per il teorema dei due fondi si ha che $\bar{E} = \lambda r_f + (1 - \lambda)E_M$. Confrontando quest'ultima con l'espressione di \bar{E} nella (3.2), è possibile calcolare il valore del parametro λ per \bar{P} .

Per quanto osservato fin qui la (3.4) diventa:

$$r(\lambda r_f) = \frac{\Delta_M^2 + \Delta_M x_\alpha \sigma_M}{y_\alpha (\sigma_M^2 + \Delta_M^2) + \Delta_M \sigma_M r_f x_\alpha - r_f \sigma_M^2}$$

Vogliamo ora studiare come varia l'avversione al rischio $r(\lambda r_f)$ al variare dei parametri x_α ed y_α che esprimono il vincolo di shortfall $\mathcal{S}_{\alpha, y_\alpha}$.

A tale scopo riscriviamo la (3.4) come:

$$r(\lambda r_f) = \frac{Ax_\alpha + B}{C + Dx_\alpha}$$

dove $A = \Delta_M \sigma_M$, $B = \Delta_M^2$, $C = y_\alpha (\sigma_M^2 + \Delta_M^2) - r_f \sigma_M^2$ e $D = \Delta_M \sigma_M r_f$.

Utilizzando tali notazioni calcoliamo la derivata di $r(\lambda r_f)$ rispetto al parametro x_α :

$$\frac{d(r(\lambda r_f))}{dx_\alpha} = \frac{AC - BD}{(C + Dx_\alpha)^2}$$

dove $AC - BD = \Delta_M \sigma_M (\Delta_M^2 + \sigma_M^2) (y_\alpha - r_f)$.

Ricordiamo che $\Delta_M > 0$ e $\sigma_M > 0$. Per cui l'espressione $AD - BC$, e quindi la derivata $\frac{d(r(\lambda r_f))}{dx_\alpha}$, è negativa se e soltanto se $y_\alpha < r_f$, ovvero quando l'intercetta della retta di shortfall \mathcal{S} è inferiore all'intercetta della Capital Market Line \mathcal{L} (si veda la figura 5b). Questo implica che sotto tale ipotesi l'avversione al rischio cresce al decrescere della probabilità di shortfall α . Possiamo quindi affermare che $r(\lambda r_f)$ è una funzione decrescente di x_α e quindi della probabilità di shortfall α . Se si osserva che al crescere di α (fra 0 e 0.5) il vincolo di shortfall $\mathcal{S}_{\alpha, y_\alpha}$ diventa meno stringente (in quanto diminuisce la pendenza positiva della retta di shortfall), è naturale aspettarsi che l'avversione al rischio dell'individuo decresca. Vogliamo inoltre osservare che il caso $y_\alpha > r_f$ non è di interesse nell'ottica del nostro problema in quanto possiamo senz'altro supporre che la soglia di rendimento minima imposta dal vincolo di shortfall sia minore del rendimento atteso del titolo certo r_f .

Consideriamo ora $r(\lambda r_f)$ come funzione del parametro y_α ed a tale scopo riscriviamo la (3.4) come

$$r(\lambda r_f) = \frac{A}{y_\alpha B + D}$$

dove $A = \Delta_M^2 + x_\alpha \Delta_M \sigma_M$, $B = (\Delta_M^2 + \sigma_M^2)$ e $D = \Delta_M \sigma_M r_f x_\alpha - r_f \sigma_M^2$. Se ora calcoliamo la derivata di $r(0)$ rispetto alla variabile y_α , si ottiene:

$$\frac{d(r(\lambda r_f))}{dy_\alpha} = \frac{-AB}{(By_\alpha + D)^2} = \frac{-\Delta_M (\Delta_M^2 + \sigma_M^2) (\Delta_M + \sigma_M x_\alpha)}{(By_\alpha + D)^2}$$

Quest'espressione risulta essere positiva se e soltanto se $\Delta_M + \sigma_M x_\alpha < 0$. Le considerazioni fatte dopo la (3.2) permettono di concludere che tale condizione è soddisfatta se e soltanto se la retta \mathcal{L} ha pendenza minore della retta di shortfall \mathcal{S} . Tale condizione è soddisfatta se le due rette sono incidenti ed $y_\alpha < r_f$. Sotto queste ipotesi abbiamo che l'avversione al rischio $r(\lambda r_f)$ è una funzione crescente del parametro y_α e quindi cresce al crescere della soglia minima del rendimento atteso y_α . Questo è il risultato che ci aspettavamo tenendo conto che al crescere della soglia minima del

rendimento atteso il vincolo di shortfall $\mathcal{S}_{\alpha, y_\alpha}$ diventa più stringente a parità di probabilità di shortfall (in quanto la retta di shortfall si sposta verso l'alto con pari pendenza), e quindi l'avversione al rischio dell'individuo aumenta.

Vogliamo ora studiare come il parametro a varia in funzione della probabilità di shortfall α e della soglia di rendimento y_α , utilizzando la relazione (3.4). In particolare determiniamo le curve di livello:

$$(4.1) \quad a(\alpha, y_\alpha) = k$$

dove k è una costante reale. Lungo tali curve il valore del parametro a è costante per definizione e quindi resta costante anche l'avversione al rischio dell'investitore che sceglie \bar{P} come portafoglio ottimo. Abbiamo già osservato alla fine del paragrafo 3 che a è sempre positivo, quindi possiamo supporre $k > 0$ nella (4.1).

Per comodità di calcolo riscriviamo la (3.4) come:

$$a(\alpha, y_\alpha) = \frac{\Delta_M^2 + x_\alpha \Delta_M \sigma_M}{y_\alpha (\sigma_M^2 + \Delta_M^2) + \Delta_M \sigma_M r_f x_\alpha - r_f \sigma_M^2} = \frac{Ax_\alpha + B}{Cx_\alpha + Dy_\alpha + G}$$

dove abbiamo posto $A = \Delta_M \sigma_M$, $B = \Delta_M^2$, $C = \Delta_M \sigma_M r_f$, $D = (\sigma_M^2 + \Delta_M^2)$ e $G = -r_f \sigma_M^2$. L'equazione (4.1) allora diventa:

$$\frac{Ax_\alpha + B}{Cx_\alpha + Dy_\alpha + G} = k$$

ovvero anche $Ax_\alpha + B - kCx_\alpha - kDy_\alpha - kG = 0$. Se per semplificare le notazioni poniamo $(x, y) = (x_\alpha, y_\alpha)$, la relazione (4.1) è equivalente alla seguente:

$$(4.2) \quad (A - kC)x - kDy + B - kG = 0.$$

Le curve di livello (4.1) sono quindi delle rette nel piano (x, y) . Se dividiamo per $kD \neq 0$ nella (4.2), si ottiene l'equazione $y = \frac{(A-kC)}{kD}x + \frac{B-kG}{kD}$.

Consideriamo ora $k = a_M$ e calcoliamo esplicitamente la curva di livello relativa a tale scelta del parametro k . Con un calcolo diretto si ottiene dalla (4.2) l'equazione:

$$y = \sigma_M x + E_M$$

Tutti i punti di tale retta verificano per definizione $a(\alpha, y_\alpha) = a_M$ e corrispondono quindi ai possibili vincoli di shortfall che determinano la scelta del portafoglio ottimo \bar{P} con avversione al rischio pari a quella che si avrebbe scegliendo il portafoglio di mercato P_M .

5 Conclusion

Abbiamo presentato un metodo di selezione di portafoglio con vincolo di *shortfall*. Esso fornisce un criterio di scelta di un portafoglio ottimo per un individuo che voglia investire il proprio capitale in parte nel titolo certo ed in parte in un portafoglio con rendimento incerto. In questo lavoro si determina l'espressione algebrica della deviazione standard e del rendimento atteso del portafoglio ottimo selezionato sotto il vincolo di *shortfall* in termini della deviazione standard e del rendimento atteso del portafoglio di mercato, del rendimento del titolo certo e dei parametri di *shortfall*. Calcoliamo inoltre la misura di avversione al rischio di Arrow-Pratt dell'investitore che sceglie il portafoglio ottimo in ottica di *shortfall* e studiamo la sensitività di tale parametro al variare dei parametri di *shortfall*. Risultati significativi li otteniamo nel caso in cui la soglia di *shortfall* sia minore del rendimento certo, coerentemente con l'ipotesi di assenza di arbitraggio che non permette di ottenere rendimenti certi superiori a quello del titolo certo. Calcoliamo anche quali siano i possibili vincoli di *shortfall* che danno luogo ad una fissata scelta del portafoglio ottimo da parte di un individuo avente avversione al rischio fissata. In particolare studiamo il caso in cui tale avversione al rischio sia uguale a quella di un investitore che scelga come portafoglio ottimo quello di mercato.

References

- [HL] Huang, C. and Litzenberger, R.H. (1988) *Foundations for financial economics* North-Holland.
- [L] Luenberger, D.G. (1998) *Investment Science* Oxford University Press.
- [LBK] Leibowitz, M.L. Bader, L.N. Kogelman, S. (1996) *Return targets and shortfall risk* Mc Graw Hill.
- [M] Moriconi, F. (1994) *Matematica Finanziaria*, Il Mulino.

WORKING PAPER PUBBLICATI

1997

1. M. D'ANTONIO, M. SCARLATO
Struttura economica e commercio estero: un'analisi per le province italiane
2. P. GAREGNANI, A. BALUMBO
Accumulation of capital
3. E. CERRITO
Crisi di cambio e problemi di politica monetaria nell'Italia di fine Ottocento.
Appunti su alcune evidenze empiriche

1998

4. F. MANNI
Struttura delle fonti di finanziamento:
un'indagine sulle principali società italiane produttrici di bevande
5. J.O. BERGER, J. MORTERA
Default Bayes factors for one-sided hypothesis testing
6. A. TREZZINI
Capacity utilisation in the long run: a reply to Senano
7. A.M. FERRAGINA
Quality product differentiation in CEE-EU Intra-Industry trade
8. M. F. RENZI, L. CAPPELLI, G. SALERNO
Outsourcing: opportunità e limiti per le aziende che operano
con sistemi di qualità conformi alle norme ISO 9000
9. M. SCARLATO
The impact of international trade on employment and wage differentials:
some evidence from the Italian macro-regions
10. A. TREZZINI
Some notes on long-run capacity utilisation,
steady state and induced investment

1999

11. S. MONNI
A convergence analysis of human development
12. G. M. REY
Informazione e politiche pubbliche: non è mai troppo tardi

2000

13. M.M. BARBIERI, C. CONIGLIANI
Fractional bayes factors for the analysis of autoregressive models
with possible unit roots
14. M. SCARLATO
Capitale sociale e Sviluppo Economico
15. A.M. FERRAGINA
Price versus quality competition in Italy's trade
with Central and Eastern Europe over Transition
16. M. D'ANTONIO, M. SCARLATO
Capitale umano e sviluppo economico. Un modello di equilibrio economico generale per il
Centro-Nord ed il Mezzogiorno d'Italia
17. M. CENCI, L. ROFFO CIUCCI
Gli effetti della regolamentazione sull'attività di Insider Trading
18. A. GHENO
Alberi binomiali e struttura della volatilità
19. M. CENCI
Modelli per la struttura a termine con volatilità stocastica
(una rassegna critica)

20. M. CENCI, A. GHENO
Metodologie per la valutazione delle obbligazioni convertibili
in ipotesi di evoluzione stocastica della struttura per scadenza

2001

21. M. D'ANTONIO
L'interdipendenza tra economia ed ambiente: un'analisi applicata all'Italia
22. A. NACCARATO
Uno studio sulla diffusione di fenomeni meteorologici mediante
particolari modelli spazio-temporali
23. M. CENCI, M. SCARLATO
Settore sommerso e politiche di estensione: un approccio stocastico
24. S. FADDA
Per un nuovo sostegno allo sviluppo locale: patti territoriali
e servizi al territorio nel nuovo scenario economico

2002

25. F. DE FILIPPIS, D. STORTI
Le politiche di sviluppo rurale nell'Unione Europea:
un "secondo pilastro" tutto da inventare
26. F. DE FILIPPIS, L. SALVATICI
The eastwards Enlargement of the European Union
and the Common Agricultural Policy
27. S. FIUMARA, E. BELLISARIO
La rilevanza della certificazione di qualità nella responsabilità
del produttore di giocattoli
28. S. FADDA
Does the change of Economic institutions require a change in values?
29. A. CORESE
La mediatrice: approcci gestionali
30. S.M. FRATINI
Il teorema dell'indice e l'unicità dell'equilibrio con produzione:
una discussione dei limiti di procedimento
31. C. CONIGLIANI, F. SPEZZAFERRI
An alternative Bayes factor for testing for unit autoregressive roots
32. M. CIURLIA
Applicazione di tecniche di simulazione alla valutazione delle opzioni russe

2003

33. C. D'APICE
La distribuzione del reddito in Italia nell'ultimo trentennio
34. C. CONIGLIANI, A. TANCREDI
Semi-parametric modelling for costs of health care technologies
35. M. CENCI, M. SCARLATO
Innovazione tecnologica e offerta di skills: una simulazione del ruolo della storia
e delle aspettative in un'area in via di sviluppo

2004

36. S. FRATINI
Il ritorno delle tecniche in un modello di equilibrio intertemporale
con generazioni sovrapposte
37. V. GUIZZI
Selezione di portafogli ottimi con vincolo di shortfall