UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

MODELLI PER LA STRUTTURA A TERMINE CON VOLATILITÀ STOCASTICA

(Una rassegna critica)

di Marisa Cenci

Working Paper n° 19, 2000

ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

Working Paper n° 19, 2000

- I "Working Papers" del Dipartimento di Economia svolgono la funzione di divulgare tempestivamente, in forma definitiva o provvisoria, i risultati di ricerche scientifiche originali. La loro pubblicazione è soggetta all'approvazione del Comitato Scientifico.

- Per ciascuna pubblicazione vengono soddisfatti gli obblighi previsti dall'art. 1 del D.L.L. 31.8.1945, n. 660 e successive modifiche.

- Copie della presente pubblicazione possono essere richieste alla Redazione.

REDAZIONE:
Dipartimento di Economia
Università degli Studi di Roma Tre
Via Ostiense, 139 - 00154 Roma
Tel. 0039-6-57374003 fax 0039-6-57374093
E-mail: dip_eco@uniroma3.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

MODELLI PER LA STRUTTURA A TERMINE CON VOLATILITÀ STOCASTICA*

(Una rassegna critica)

di Marisa Cenci**

* Ricerca svolta nell'ambito del progetto "Contratti strutturati. Problemi di valutazione. Logiche di controllo". Finanziamento MURST 1999, progetto nazionale "Modelli per la finanza matematica".

** E-mail: cenci@uniroma3.it

SOMMARIO

Abstract

Nel presente lavoro vengono evidenziate le problematiche che hanno portato alla introduzione di modelli per la struttura per scadenza con volatilità stocastica e viene riproposta una lettura dei modelli più noti in letteratura inserendoli a seconda delle loro caratteristiche o tra i modelli affini o tra i modelli nei quali si ipotizza che la volatilità del tasso a breve abbia un andamento di tipo GARCH. Si analizzano inoltre le problematiche connesse con la loro verifica empirica

Parole chiave: Struttura a termine, Modelli affini, Volatilità stocastica.

1 Introduzione

L'evoluzione della struttura per scadenza può essere descritta specificando la dinamica di grandezze finanziarie equivalenti come ad esempio:

- il rendimento a scadenza R(t,T)
- lo *spot rate* r(t)
- l'intensità di rendimento a scadenza (*forward rate*) f(t,T)
- i prezzi di *z.c.b.* P(t,T).

Si riportano a seguire le equazioni che legano tali grandezze:

$$P(t,T) = \exp[-R(t,T)(T-t)]$$

$$r(t) = \lim_{T \to t} R(t,T)$$

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$$

$$P(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(t,s)ds\right]$$

In un lavoro pubblicato nel 1994 Brown e Schaefer [9], applicando il metodo delle componenti principali (a dati relativi al Regno Unito dal 1989 al 1992), hanno messo in evidenza come la variabilità della struttura per scadenza possa essere spiegata in termini delle seguenti grandezze:

1) il livello
2) la pendenza
3) la curvatura.

Ciò avvalora la tesi in base alla quale per specificare l'evoluzione della struttura per scadenza bastano pochi fattori guida (max 3) che siano adatti a rappresentare l'evoluzione della grandezze suddette.

In letteratura la variabile più utilizzata per descrivere l'evoluzione della struttura per scadenza è lo *spot rate* che, in ipotesi di evoluzione *mean reverting*, consente di individuare il livello attraverso il tasso di lungo periodo e la pendenza, come differenza tra il tasso a breve e il tasso sul lungo periodo.

I modelli tradizionali ad un fattore, nella maggior parte dei casi, incorporano tali grandezze nel *drift* dell'equazione che rappresenta l'evoluzione dello *spot rate* che, nella forma più generale, può essere scritta facendo riferimento all'equazione differenziale di Chan, Karolyi, Longstaff e Sanders [10].

$$dr(t) = \kappa[\mu - r(t)]dt + \sigma r^{\gamma}(t)dw(t) \qquad \gamma \geq 0 \tag{1.1}$$

dove κ è una costante legata alla velocità di aggiustamento verso il tasso di lungo periodo μ, σ è costante e dw(t) è un processo di Wiener.

La (1.1) consente di individuare, per opportuni valori di γ, modelli noti in letteratura quali il modello di Vasicek che si ottiene per $\gamma=0$, il modello CIR ad un fattore ottenuto per $\gamma=1/2$, il modello di Courtadon che si ha per $\gamma=1$.

Una evoluzione dello *spot rate* del tipo (1.1) con $\gamma\neq0$ rientra nella classe dei modelli CEV (*constant elsticity of variance*) che, tramite il fattore $r^{\gamma}(t)$, introducono nel coefficiente di diffusione una forma di eteroschedasticità condizionata facendo dipendere la volatilità dal così detto "effetto livello".

Le soluzioni analitiche ottenute per i modelli di Vasicek e CIR evidenziano come le possibili evoluzioni ottenibili per la struttura a termine tramite tali modelli abbiano andamento o sempre crescente, o sempre decrescente o prima crescente e successivamente decrescente. Tali modelli non sono pertanto adatti a rappresentare strutture a termine con pendenza variabile quali quella che ad esempio alterna crescenza, decrescenza, crescenza.

Per cercare di introdurre una maggiore flessibilità dal punto di vista della pendenza si è fatto riferimento a modelli a più fattori.

Ritenendo che l'influenza principale sulla pendenza della struttura a termine fosse dovuta alla evoluzione del *drift* del processo di diffusione dello *spot rate*, in questi ultimi anni vari Autori hanno proposto modelli a due fattori per l'evoluzione della struttura a termine in cui il secondo fattore stocastico è individuato o dal tasso di lungo periodo o dalla velocità di richiamo verso quest'ultimo.

Tra i lavori più interessanti in questo ambito sono da citare:

- le estensioni dei modelli CIR e Vasicek
- il modello di Brennan-Schwartz
- il modello di Chen
- il modello di Balduzzi-Das-Foresi-Telmer
- il modello di Bakus-Foresi-Telmer.

In un lavoro di Dybvig [15] tuttavia si è osservato nei modelli a due fattori la scelta di un fattore additivo, che influenzi il *drift* dello *spot rate,* ha un impatto trascurabile sulla valutazione di opzioni il cui sottostante è un titolo *interest rate sensitive.* Nello stesso lavoro si evidenzia che, qualora come secondo fattore si scelga la varianza della componente principale, l'impatto sulla valutazione dei titoli obbligazionari è trascurabile, mentre l'influenza di tale scelta è rilevante sui prezzi di opzioni su titoli *interest rate sensitive.*

D'altro canto se analizziamo il semplice modello deterministico proposto da Merton per l'evoluzione dello *spot rate* in cui:

$$dr(t) = \mu dt + \sigma dW ,$$

ipotizzato il prezzo di mercato del rischio costante e pari a λ, è facile determinare per il rendimento a scadenza una espressione del tipo:

$$R(t,T) = r(t) + \frac{1}{2}(\mu - \lambda\sigma)(T-t) - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^2. \tag{1.2}$$

La relazione (1.2) evidenzia come una variazione in volatilità produca due differenti effetti sulla curva dei rendimenti: il primo comporta una variazione della pendenza della curva stessa, il secondo influenza la curvatura della stessa.

Questo comportamento del rendimento a scadenza e le considerazioni di Dybvig giustificano l'utilizzo di modelli a due fattori in cui il secondo fattore stocastico è individuato dalla volatilità dello *spot rate*.

L'evidenza empirica ha mostrato che la volatilità dei tassi a breve è anch'essa volatile e che inoltre grandi variazioni subite dalla volatilità tendono ad essere seguite da grandi variazioni e viceversa.

L'introduzione della volatilità stocastica in modelli per l'evoluzione della struttura a termine dovrebbe rendere più flessibile la pendenza della struttura a termine e la curvatura della stessa, anche se non è immediato dedurre quali legami si vengano a stabilire tra le grandezze sopra citate.

I modelli in cui si ipotizza che la volatilità del tasso a breve sia stocastica sono in genere a due o più fattori e consentono di lavorare nell'ipotesi in cui i rendimenti a scadenza con diversa *maturity* non sono perfettamente correlati. Questa proprietà è particolarmente utile qualora si voglia utilizzare un modello della struttura a termine per valutare opzioni su *swap*. I tassi *swap* possono infatti essere espressi come una combinazione lineare dei tassi a termine [29], il *pricing* di *swaption* attraverso modelli ad un fattore, che implicitamente ipotizzano perfetta correlazione tra i tassi a termine, porta a sopravalutare tali opzioni.

La nota propone una rilettura dei modelli noti in letteratura alla luce delle proprietà dei modelli affini ed è organizzata come segue: nel paragrafo 2 si analizzano i principali modelli affini con volatilità stocastica, nel paragrafo 3 si vedono i legami tra modelli affini di tipo Ar e modelli affini di tipo AY, nel paragrafo 4 si riportano i modelli in cui la volatilità non segue un processo affine, nel paragrafo 5 si conclude con i problemi connessi con l'applicazione pratica dei modelli considerati.

2. Modelli affini con volatilità stocastica

All'interno dei modelli affini con volatilità stocastica è necessario distinguere i modelli in cui si ipotizza esplicitamente una evoluzione stocastica di tipo affine per la volatilità del tasso a breve e i modelli in cui l'evoluzione della volatilità dello stesso è implicitamente stocastica.

Il primo tipo di modelli affini che, usando la notazione suggerita da Dai e Singleton [13] si denoteranno con Ar, è quello originato da modelli multifattoriali alla CIR per la struttura a termine in cui, generalmente, le variabili base sono lo *spot rate*, il tasso di lungo periodo e la volatilità del tasso a breve. Le equazioni che regolano l'evoluzione della struttura a termine in questo caso sono della forma

$$dZ(t)=\begin{pmatrix} dr(t) \\ d\theta(t) \\ dv(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \kappa(\theta(t)-r(t)) \\ \nu(\bar{\theta}-\theta(t)) \\ \mu(\bar{v}-v(t)) \end{pmatrix}dt+\Sigma_z S_z(t)dw(t) \tag{2.1}$$

dove κ, ν, μ, $\bar{\theta}$, $\bar{v}$ sono delle costanti, $\theta(t)$ è una funzione, Σ_z e S_z sono matrici (3x3) con S_z matrice diagonale in cui l'i-esimo elemento della diagonale è dato da $|S_z|_{ii}=\sqrt{\alpha_{zi}+\beta'_{zi}Z(t)}$ dove $\alpha_z \in R^3$ e $\beta_{zi} \in R^3$.

Appartengono a questo tipo di modelli il modello di Fong-Vasicek [17], il modello di Balduzzi-Das-Foresi-Sundaram[4], il modello di Chen [11].

Mentre il modello di Fong-Vasicek è un modello a due fattori nel quale non si prevede l'evoluzione stocastica del tasso di lungo periodo, i modelli di Balduzzi-Das-Foresi-Sundaram e quello di Chen sono modelli a tre fattori.

Oltre che per il numero delle variabili di stato i modelli si differenziano per la forma delle matrici Σ_z e S_z in base alle quali si stabilisce il tipo di dipendenza che sussiste tra i vari fattori. Nella tabella 1 vengono riportate per ogni modello le corrispondenti matrici Σ_z e S_z da cui è semplice dedurre i valori α_{zi} e i vettori β'_{zi} per i=1,2,3.

Tabella 1		
Fong-Vasicek	**Balduzzi-e altri**	**Chen**
$\Sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & \rho_{rv} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\Sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho_{rv} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\Sigma_z=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$S_z(t)=\begin{pmatrix} \sqrt{v(t)} & 0 \\ 0 & \xi\sqrt{v(t)} \end{pmatrix}$	$S_z(t)=\begin{pmatrix} \sqrt{v(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \varsigma & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{v(t)} \end{pmatrix}$	$S_z(t)=\begin{pmatrix} \sqrt{v(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \varsigma\sqrt{\theta(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \eta\sqrt{v(t)} \end{pmatrix}$

La forma della matrice Σ_z, nel caso dei modelli di Fong-Vasicek e Balduzzi-Das-Foresi-Sundaram, evidenzia la dipendenza ipotizzata tra lo *spot rate* e la volatilità dello stesso tramite il coefficiente ρ_{rv}.

Nei modelli di secondo tipo, che si denoteranno con AY, la struttura a termine dipende da n variabili di stato, in genere non specificate, $Y_i(t)$ $i=1,2,\ldots,n$, ognuna delle quali segue una evoluzione affine. Nella pratica spesso tali variabili sono identificate con i rendimenti di *z.c.b.* con diversa maturity. Lo *spot rate* è una combinazione lineare con coefficienti δ_i di tali variabili. Formalmente, indicato con $Y(t)\in R^n$ il vettore che individua le variabili di stato, si potrà scrivere l'evoluzione della struttura per scadenza facendo riferimento alle:

$$r(t) = \sum_{i=1}^{N} \delta_i Y_i(t)$$

(2.2) dove

$$dY(t) = \kappa(\theta - Y(t))dt + \Sigma S(t)dw(t)$$

dove $\theta \in R^n$, $dw \in R^n$, κ e Σ sono matrici n x n e S(t) una matrice diagonale nella quale:

$$S_{ii} = \sqrt{\alpha_i + \beta_i{}'Y_i}$$

essendo $\beta_i \in R^n$.

I valori assunti dai vettori β_i consentono di distinguere all'interno dei modelli affini due classi: i modelli alla Gauss-Markov, cioè con volatilità dello *spot rate* costante, che si ottengono nel caso in cui i vettori β_i sono tutti nulli, e i modelli in cui la volatilità del tasso a breve è stocastica che si hanno qualora ciò non accade.

Nell'ambito dei modelli AY i prezzi degli *z.c.b.* si determinano con riferimento alla probabilità *risk neutral* Q condizionata alle informazioni disponibili al tempo t; sotto tale misura la dinamica delle variabili di stato di un generico modello affine è data da:

$$dY(t) = \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - Y(t))dt + \Sigma S(t)d\tilde{w}(t) \tag{2.3}$$

dove: $\tilde{w}(t)$ è un moto Browniano standard n-dimensionale indipendente sotto Q, $\tilde{\kappa} = \kappa + \Sigma\phi$, $\tilde{\theta} = \tilde{\kappa}^{-1}(\kappa\theta - \Sigma\psi)$, $\lambda=(\lambda_1 , \lambda_2 ,\ldots, \lambda_n)'$ è il vettore dei prezzi di mercato del rischio associati alle varibili di stato, ϕ è una matrice n x n e la sua i-esima riga è data da $\lambda_i\beta_i'$ e $\psi \in R^n$ e la sua i-esima componente è data da $\lambda_i\alpha_i$.

I modelli affini AY, come dimostrato da Duffie e Kan [14], offrono il vantaggio della log-linearità dei prezzi degli *z.c.b.* rispetto alle variabili di stato per cui si può scrivere:

$$P(t,T) = e^{A(t,T)-B(t,T)'Y(t)} \tag{2.4}$$

dove A(t,T) e le n componenti del vettore B(t,T)) dipendono da t e T tramite la vita a scadenza dello *z.c.b.*, $\tau = T - t$ e si determinano risolvendo il sistema di equazioni differenziali ordinarie:

di r(t) o v(t) con strumenti appropriati non può fare affidamento sulle sensitività dedotte dal modello.

Questa spiacevole caratteristica è purtroppo comune a tutti i modelli AY ed è legata al fatto che, specificato il modello la correlazione tra rendimenti a termine con diversa *maturity* ha un andamento fissato che in generale non rispecchia quello proprio del mercato.

3. Equivalenza tra modelli Ar e modelli AY

I modelli affini di tipo Ar ed i modelli affini di tipo AY con volatilità stocastica, come dimostrato da Dai e Singleton [13] sono tra loro equivalenti. La dimostrazione si basa sull'impossibilità di identificare in maniera univoca i fattori relativi ad un modello affine di tipo AY basandosi sulla conoscenza dei prezzi di *z.c.b.* e della loro funzione di distribuzione congiunta. Il numero delle n-uple di fattori che portano ad individuare la stessa struttura per scadenza può essere ridotto facendo delle restrizioni sui vettori δ, β_i e sulle matrici κ, Σ.

La prima forma di sovraidentificazione dei modelli AY è legata alle così dette rotazioni non singolari (NSR) del vettore Y(t) che corrispondono a trasformazioni del vettore Y(t) in $Y^*(t)=XY(t)$, dove X è una matrice (n x n) non singolare e del vettore δ in $\delta^*=\delta X^{-1}$. Tali trasformazioni consentono di ottenere una scrittura dello spot rate esattamente identica a quella del modello iniziale individuata sulla base delle componenti del vettore $Y^*(t)$.

L'invarianza dei prezzi degli *z.c.b.* e della loro densità di probabilità condizionata congiunta. alla data t, subordinatamente ai prezzi alla data s, con $s<t$, porta ad affermare che, data una struttura a termine affine AY, questa può essere usata come base per una famiglia di modelli equivalenti ottenuti tramite NSR.

La sovraidentificazione del modello può essere eliminata completamente solo facendo in modo che l'unica matrice X che può essere usata per generare NSR sia la matrice identità.

Un primo passo verso la riduzione della sovraidentificazione è ricondurre la matrice κ ad una matrice $\hat{\kappa}$ diagonale, questo restringe la scelta delle matrici X che producono rotazioni non singolari all'ambito delle matrici diagonali.

Un modello AY in cui κ è diagonale sarà indicato con AYD. Nell'ambito dei modelli AYD distingueremo:

a) i modelli AYD(n,n) per i quali le componenti del vettore δ sono tutte non nulle, per cui il drift dello *spot rate* viene a dipendere da tutte le variabili di stato,
b) i modelli AYD(n,s) in cui r(t) viene espresso in funzione di $s<n$ fattori, i restanti (n-s) fattori intervengono solo tramite l'influenza che essi hanno sui rimanenti.

Una ulteriore fonte di sovraidentificazione dei modelli AY riguarda la determinazione non unica del *drift* che caratterizza il processo evolutivo. Se non si pongono vincoli ai parametri α_i, si può ottenere la stessa struttura per scadenza usando le variabili di stato Y(t) o considerando le variabili di stato $\hat{Y}(t)=Y(t)+\pi(t)$ dove $\pi(t)$ è un vettore ad n componenti che verifica la seguente condizione: $\delta'\hat{Y}(t) = \delta'Y(t)$. La media di lungo periodo del processo di diffusione di $\hat{Y}(t)$ sarà individuata da $\theta + \pi(t)$ e la varianza condizionata avrà la forma $\sqrt{\alpha_i + \beta_i'\hat{Y}(t) - \beta_i'\pi(t)}$.

Sfruttando le due forme di sovraidentificazione sopra citate si può mostrare l'equivalenza tra modelli AY(n,s) e modelli Ar rappresentati tramite la (2.1).

Partendo da un modello AY(n,s) si può infatti ottenere un modello equivalente Ar considerando una rotazione non singolare ottenuta tramite una matrice L in cui la prima riga è costituita dalle componenti del vettore δ.

In generale un modello Ar è ottenuto da un modello AYD(n,s) tramite una trasformazione del tipo:

$$Z(t) = \pi_z(t) + LY(t) \tag{3.1}$$

dove $\pi_z(t)$ è un vettore che serve ad introdurre una dipendenza dal tempo nel *drift* del processo AYD(n,s) ed è caratterizzato dall'avere le ultime n-s componenti nulle , L è una matrice diagonale a blocchi definita, in accordo con una decomposizione di Y(t) in s componenti primarie e (n-s) variabili di stato ausiliarie, da:

$$L = \begin{pmatrix} L^{(s)} & 0_{sx(n-s)} \\ 0_{(n-s)xs} & I_{(n-s)x(n-s)} \end{pmatrix}$$

dove $L^{(s)}$ è una matrice triangolare superiore, il vettore $\pi_z(t)$ ha solo le prime s componenti non nulle.

I modelli Ar del tipo (2.1) che non prevedono nel *drift* dello *spot rate* la dipendenza dalla volatilità e per analogia a quanto detto per i modelli AY potranno essere definiti come modelli Ar(3,2) e risulteranno pertanto equivalenti in base alla (3.1) a modelli AYD(3,2).
In particolare il modello di Fong Vasicek risulterà equivalente ad un modello AYD(2,1), mentre i modelli di Chen e di Balduzzi-Das-Foresi-Sundaram, tramite la trasformazione suddetta vengono ad essere equivalenti a modelli AYD(3,2) .

Tale equivalenza consente di ricercare per il prezzo di *z.c.b.* espressioni della forma (2.4) che vengono specificate risolvendo il sistema di equazioni differenziali (2.5) con le opportune condizioni al contorno. Sfortunatamente per tali modelli o tutte o alcune delle funzioni A(t,T), e B(t,T) non sono ottenibili in forma chiusa in tal caso si deve ricorrere ad algoritmi quali quelli suggeriti in [14] per la risoluzione del sistema di equazioni differenziali.

4. Modelli EGARCH

Uno dei principali difetti che vengono imputati ai modelli affini è quello di non approssimare bene la struttura della volatilità dello *spot rate*. Analisi empiriche basate su serie storiche hanno evidenziato un particolare comportamento della volatilità del tasso a breve. In particolare si è rilevato come grandi variazioni subite dalla volatilità del tasso a breve tendono ad essere seguite da grandi variazioni e viceversa, questo autorizza ad ipotizzare per il tasso a breve un processo di tipo GARCH.

In un lavoro recente Ball e Torous [5] hanno messo in evidenza alcune differenze tra l'evoluzione della volatilità dei tassi di interesse e quella dei rendimenti azionari.

Contrariamente a ciò che accade sul mercato azionario, dove si rileva una correlazione negativa tra rendimento e volatilità, le variazioni dei tassi di interesse sono correlate in maniera trascurabile con le variazioni in volatilità; inoltre gli shock subiti dalla volatilità dei tassi a breve risultano meno persistenti rispetto agli shock subiti dai rendimenti azionari. Una giustificazione di quest'ultima osservazione va ricercata nella velocità con cui i tassi a breve reagiscono ad eventi di carattere macroeconomico oppure a variazioni dei tassi effettuate dalle Banche Centrali.

E' stata inoltre rilevata una sensibilità della volatilità dei tassi a breve rispetto al livello degli stessi, anche se una stima precisa della relazione che lega tali grandezze è difficile.

Anche nell'ambito della volatilità dei tassi si originano i così detti *clustering* di volatilità, la loro natura transitoria suggerisce di descrivere l'evoluzione dello *spot rate* nel discreto tramite un modello EGARCH che consente di evitare vincoli di non negatività da imporre sui parametri che caratterizzano la varianza condizionata.

La caratteristica di tali modelli sta nel fissare una evoluzione di tipo ARCH per il logaritmo della varianza condizionata del tasso a breve che come dimostrato da Nelson [28] al tendere dell'intervallo di tempo a zero può essere rappresentata tramite un processo di diffusione per r(t) in cui la volatilità è a sua volta un processo stocastico.

Rientrano in questa categoria i due modelli proposti da Andersen e Lund [1] [2] e il modello suggerito da Ball e Torous [5].

Le equazioni che sono assunte alla base di tali modelli sono riportate nella Tabella 2.

Tabella 2	
Modelli	Equazioni evolutive
1° Andersen e Lund	$dr(t) = \kappa_1(\mu - r(t))dt + \sigma(t)r^{\gamma}(t)dw_1$ $d\log\sigma^2(t) = \kappa_2(\alpha - \log\sigma^2(t))dt + \xi_1 dw_2$
2° Andersen e Lund	$dr(t) = \kappa_1(\mu(t) - r(t))dt + \sigma(t)r^{\gamma}(t)dw_1$ $d\mu(t) = \kappa_3(\theta - \mu(t))dt + \xi_2\sqrt{\mu(t)}dw_3$ $d\log\sigma^2(t) = \kappa_2(\alpha - \log\sigma^2(t))dt + \xi_1 dw_2$
Ball e Torous	$r_t = (a + br_{t-1}) + \sigma_{t-1}r_{t-1}^{\gamma}\varepsilon_t^1$ $\log\sigma_t^2 - \mu = \beta(\log\sigma_{t-1}^2 - \mu) + \xi\varepsilon_t^2$

Come si può osservare dalla Tabella 2 tutti i modelli fanno riferimento ad una evoluzione dello *spot rate* del tipo (1.1), mentre i modelli di Andersen e Lund sono modelli continui, il modello di

Ball e Torous è un modello discreto. I disturbi stocastici che intervengono nei vari modelli sono ipotizzati tra loro indipendenti.

Le problematiche che si presentano nell'ambito di modelli di questo tipo sono essenzialmente di carattere econometrico cioè relative alla stima dei parametri sulla base della serie storica del tasso a breve assunto come *proxy* dello *spot rate.*

I metodi di stima proposti da Andersen e Lund sono basati sul Metodo efficiente dei momenti introdotto da Bansal et al. [6] e Gallant e Tauchen [19].

La procedura di stima suggerita da Ball e Torous fa invece riferimento alla applicazione di filtri a serie storiche non gaussiane seguendo il procedimento suggerito da Frühwirth e Schnatter [18].

I risultati ottenuti sono per tutti i modelli apprezzabili dal punto di vista del *fitting* anche se Andersen e Lund rilevano alcune difficoltà nel rappresentare le code della distribuzione relativa alle innovazioni di r(t).

5. Conclusioni

La letteratura sulla struttura a termine concorda nel rigettare per la rappresentazione della stessa modelli monofattoriali. Questo ha portato a supporre per l'evoluzione dello *spot rate* modelli a più fattori che attraverso la relazione:

$$P(t,T) = E_t^*[\exp(-\int_t^T r(s)ds)],$$

dove E_t^* è il valore atteso rispetto alle probabilità *risk neutral,* influenzano direttamente l'andamento della struttura a termine.

Come si è visto, i modelli in cui uno di tali fattori è rappresentato dalla volatilità del tasso a breve sono caratterizzati o dall'appartenenza alla classe dei modelli affini o dall'appartenenza alla classe dei modelli EGARCH. L'elemento che distingue le due classi, al di là della formalizzazione del modello, è la diversa funzione che il mercato ha nella ideazione dello stesso. I modelli affini, che fanno affidamento su un supporto matematico teorico di rilievo, vedono il mercato come fonte di informazioni che consentono la calibratura del modello, mentre i modelli con volatilità del tasso a breve non lineare partono da osservazioni dedotte da serie storiche di dati e cercano di strutturarsi in funzione di esse.

Rispetto i modelli EGARCH i modelli affini di tipo AY offrono il vantaggio di poter inserire tra le variabili da cui dipende l'evoluzione della struttura per scadenza anche variabili macroeconomiche quali: l'inflazione, il tasso di produzione industriale, il tasso di cambio, la crescita monetaria, etc.. Analisi empiriche hanno evidenziato come i rendimenti a scadenza siano influenzati da tali grandezze anche se non uniformemente rispetto la *maturity*, in particolare le variabili macroeconomiche che hanno un'alta influenza sui tassi a breve non necessariamente hanno lo stesso effetto sui tassi a lungo e viceversa.

Secondo quanto riportato in [20], l'ampio uso che viene fatto dei modelli AY non tiene conto delle restrizioni che implicitamente sono contenute nella loro formalizzazione. In particolare, se si indica con $R_{\tau t}$ il logaritmo del prezzo di uno *z.c.b.* che al tempo t ha *maturity* τ:

$$R_{\tau t} = \ln P(t, t+\tau),$$

è immediato dedurre che tale grandezza, per la (2.4), individua al variare di t un processo stocastico la cui evoluzione è regolata dalla:

$$dR_{\tau t} = B'(\tau)dY(t). \tag{5.1}$$

L'incremento subito dalla funzione $R_{\tau t}$ sull'intervallo unitario sarà pari a :

$$\Delta R_{\tau t} = B'(\tau)\widetilde{\kappa}\left(\widetilde{\theta} - Y(t)\right) + B'(\tau)\Sigma S(t)\varepsilon_{t+1}, \tag{5.2}$$

dove ε_{t+1} è un vettore di n variabili aleatorie i.i.d. che seguono una distribuzione normale standard.

Dalla relazione (5.2) si deducono per la media e per la varianza condizionata di $\Delta R_{\tau t}$ le espressioni:

$$E\left(\Delta R_{\tau t} \middle| Y(t)\right) = B'(\tau)\widetilde{\kappa}\left(\widetilde{\theta} - Y(t)\right) \tag{5.3}$$

$$Var(\Delta R_{\tau t} | Y(t)) = B'(\tau)\Sigma S(t)\left(B'(\tau)\Sigma S(t)\right). \tag{5.4}$$

La (5.3) e la (5.4) consentono di individuare le restrizioni implicite nei modelli AY che consistono nella costanza al variare di t delle derivate rispetto ai singoli fattori $Y_i(t)$ del valore atteso e della varianza condizionati..

Una corretta applicazione dei modelli AY non può pertanto prescindere dalla verifica empirica che testi la validità di tali condizioni sul mercato.

Ghysels e Ng [20] testano l'utilizzo di modelli AY in cui si considerano alcuni fattori individuati da variabili macroeconomiche sul mercato americano e trovano, usando test non parametrici, che modelli di questo genere sono poco adatti a descrivere l'evoluzione della struttura per scadenza.

D'altro canto l'ipotesi implicita nei modelli GARCH per la quale le variazioni future della struttura per scadenza sono legate alle variazioni subite dalla stessa in passato è difficile da accettare pienamente.

Un confronto tra i due approcci è molto difficile, come è difficile ipotizzare modelli più complessi che riescano a superare i problemi evidenziati dalle due classi di modelli. Le complicazioni dal punto di vista computazionale non sarebbero infatti ripagate dall'adattabilità del modello se si assume come base informativa la serie storica dei tassi a breve.

Forse è proprio in base a tali considerazioni che la letteratura attuale sulla struttura per scadenza si rivolge verso i così detti *market models* suggeriti da Brace, Gatarek e Musiela [7] per il tasso LIBOR e da Jamshidian [26] per i tassi swap, che consentono di inserire correttamente la struttura di volatilità letta sul mercato.

Bibliografia

[1] Andersen T.G., J. Lund (1997) "*Estimating Continuous Time Stochastic Volatility Models of the Short Term Interest Rate*" Journal of Econometrics, vol. 77.

[2] Andersen T.G., J. Lund (1997) "*Stochastic Volatility and Mean Drift in the Short-Rate Diffusion: Source of Steepness, Level and Curvature in the Yield Curve*" Manuscript North Western University.

[3] Balduzzi P., S.R. Das, S. Foresi, (1995) "*The Central Tendency: a Second Factor in Bond Yields*" Review of Economics and Statistics.

[4] Balduzzi P., S.R. Das, S. Foresi, R. Sundaram,(1996) "*A Simple Approach to Three Factor Affine Term Structure Models*" Journal of Fixed Income 6, December, 43-53.

[5] Ball C.A., W.N. Torous (1997) "*The Stochastic Volatility of Short-term Interest Rates:Some International Evidence*", Journal of Finance, v 54, n. 6 (Dec. 1999): 2339-2359.

[6] Bansal R., A.R. Gallant, R.Hussey, G.E. Tauchen (1995) "*Nonparametric Estimation of structural Models for High-frequency Currency Market Data*" ,66,251-287

[7] Brace A., D.Gatarek, M. Musiela (1995) "*The Market Model of Interest Rate Dinamics*" Working Paper,School of Mathematics; University of New South Wales, Australia

[8] Brennan M.J., E.S. Schwartz, (1979) "*A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds*" Journal of Banking and Finance, 3, 133-155.

[9] Brown R. H., S.M. Schaefer (1994) "*Why do Long Term Forward Rates (almost always) slope downward?*", London Business School working paper.

[10] Chan K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff, A.B. Sanders, (1992) "*An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*" Journal of Finance, 47, 1209-1227.

[11] Chen L.,(1996) "*Stochastic Mean and Stochastic volatility - A Three Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and its Application to The Pricing of Interest Rate Derivatives*" Backwell Publisher.

[12] Cox J.C., J.E. Ingersoll, S.A. Ross (1985) "*A Theory of the Term Structure of Interest Rates*" Econometrica 53.

[13] Dai Q., K.J. Singleton (1997) "*Specification Analysis of Affine Term Structure Models*" Working Paper 6128 National Bureau of Economic Research, Cambridge.

[14] Duffie D., R. Kan "(1996) "*A Yield- Factor Model of Interest Rates*" Mathematical Finance, 6, 379-406.

[15] Dybvig P.H. (1988) *"Bond and Bond Option Pricing Based on the Current Term Structure"*, working paper, Washington University in St Louis, Missouri.

[16] Engle R.F., V.K. Ng (1993) "*Time-Varying Volatility and the Dynamic Behavior of the Term Structure*" Journal of Money, Credit and Banking, 25, 336-349.

[17] Fong H.G., O.A Vasicek. (1991) "*Fixed Income Volatility Management*" Journal of Portfolio Management, Summer, 41-46.

[18] Frühwirth-Schnatter, S. (1994) *"Applied State Modelling of Non-Gaussian Time Series Using Integration-Based Kalman Filtering"*, Statistics and Computing 4, 259-269.

[19] Gallant A.R., G.E. Tauchen, (1996) *"Which Moments to Match?"*, Econometric Theory, 12, 657-681.

[20] Ghysel E., Ng S.,(1997) "*A Semi-Parametric Factor Model of Interest Rates and Tests of the Affine Term Structure*" Working Paper 97s-33 CIRANO Montréal

[21] Gourièroux C., (1997) "*ARCH Models and Financial Applications*", Springer.

[22] Longstaff F.A., E.S Schwartz.(1992) "*Interest Rate Volatility and the Term Structure: a Two Factor General Equilibrium Model*" Journal of Finance XLVII,1259-1282

[23] Longstaff F.A., E.S Schwartz (1992) "*A Two Factor Interest Rate Model and Contingent Claim Valuation*" Journal of Fixed Income, 3, December,16-23.

[24] Longstaff F.A., E.S Schwartz.(1993) "*Implementation of the Longstaff- Schwartz Interest Rate Model*" Journal of Fixed Income, September, 7-14.

[25] Longstaff F.A., E.S Schwartz.(1994) "*Comments on: A Note on Parameter Estimation in the Two Factor Longstaff- Schwartz Interest Rate Model*" Journal of Fixed Income, March, 101-102.

[26] Jamshidian F. (1997) "*Libor and Swap Market Models and Measures*", Fin. Stoch.;1,293-330.

[27] Merton R.C., (1973) "*Theory of rational Option Prices*" Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141-183.

[28] Nelson D.B.,(1991)"*Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*" Econometrica, 55, 703-708.

[29] Rebonato R., (1998) "*Interest Rate Option Models*", Wiley & Sons.

[30] Rebonato R., (1999) "V*olatility and Correlation",* Wiley & Sons.

[31] Vasicek O., (1977) "*An Equilibrium Characterization of the Term Structure*" Journal of Financial Economics, 5, 177-188.

WORKING PAPER PUBBLICATI

1 - 1997 Mariano D'Antonio e Margherita Scarlato
Struttura economica e commercio estero: un'analisi per le province italiane.

2 - 1997 Pierangelo Garegnani e Antonella Palumbo *Accumulation of capital.*

3 - 1997 Elio Cerrito
Crisi di cambio e problemi di politica monetaria nell'Italia di fine Ottocento. Appunti su alcune evidenze empiriche.

4 - 1998 Francesco Manni
Struttura delle fonti di finanziamento: Un'indagine sulle principali società italiane produttrici di bevande.

5 - 1998 J. O. Berger e J. Mortera
Default Bayes factors for one-sided hypothesis testing.

6 - 1998 Attilio Trezzini
Capacity utilisation in the long run: a reply to Serrano.

7 - 1998 A. M. Ferragina
Quality product differentiation in CEE-EU Intra-Industry trade

8 - 1998 M. F. Renzi, L. Cappelli, G. Salerno
Outsourcing: Opportunità e limiti per le aziende che operano con sistemi di qualità conformi alle norme ISO 9000

9 - 1998 Margherita Scarlato
The impact of international trade on employment and wage differentials: some evidence from the italian macro-regions

10 - 1998 Attilio Trezzini
Some notes on long-run capacity utilisation, steady state and induced investment

11 - 1999 Salvatore Monni
A Convergence analysis of human development

12 - 1999 Guido M. Rey
Informazione e politiche pubbliche: non è mai troppo tardi

13 - 2000 Maria Maddalena Barbieri e Caterina Conigliani
Fractional bayes factors for the analysis of autoregressive models with possible unit roots

14 - 2000 Margherita Scarlato
Capitale Sociale e Sviluppo Economico

15 - 2000 Anna M. Ferragina
Price versus quality competition in Italy's trade with Central and Eastern Europe over the Transition

16 - 2000 Mariano D'Antonio e Margherita Scarlato
Capitale umano e sviluppo economico
Un modello di equilibrio economico generale per il Centro-Nord e il Mezzogiorno d'Italia

17 - 2000 Marisa Cenci e Luana Foffo Ciucci
Gli effetti della regolamentazione sull'attività di Insider Trading

18 - 2000 Andrea Gheno
Alberi binomiali e struttura della volatilità

19 - 2000 Marisa Cenci
Modelli per la struttura a termine con volatilità stocastica (Una rassegna critica)

Finito di stampare nel mese di giugno 2000, presso
Tipolitografia artigiana **Colitti Armando** snc di *Colitti Marco & C.*
00154 Roma • Via Giuseppe Libetta 15 a • Tel. 065745311/065740258
e-mail tcolitti@tin.it • www.colitti.it