



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

ALBERI BINOMIALI E STRUTTURA DELLA VOLATILITÀ

di Andrea Gheno

A
POLITICA

TER

STUDI

Working Paper n° 18, 2000





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

Working Paper n° 18, 2000

- I “Working Papers” del Dipartimento di Economia svolgono la funzione di divulgare tempestivamente, in forma definitiva o provvisoria, i risultati di ricerche scientifiche originali. La loro pubblicazione è soggetta all’approvazione del Comitato Scientifico.
- Per ciascuna pubblicazione vengono soddisfatti gli obblighi previsti dall’art. 1 del D.L.L. 31.8.1945, n. 660 e successive modifiche.
- Copie della presente pubblicazione possono essere richieste alla Redazione.

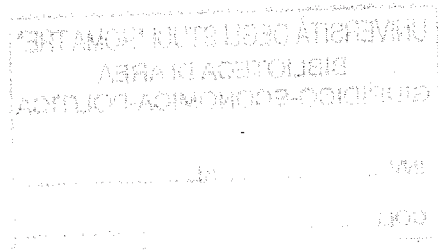
REDAZIONE:

Dipartimento di Economia
Università degli Studi di Roma Tre
Via Ostiense, 139 - 00154 Roma
Tel. 0039-6-57374003 fax 0039-6-57374093
E-mail: dip_eco@uniroma3.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

**ALBERI BINOMIALI E STRUTTURA
DELLA VOLATILITÀ**

di Andrea Gheno



zazione, costituiscono un miglioramento del modello suggerito da Jackwerth in quanto essi riescono a tener conto di un maggior numero di informazioni lette sul mercato; nel terzo e quarto paragrafo si evidenziano empiricamente le problematiche viste nel primo paragrafo e si implementa inoltre un albero generalizzato "modificato".

1. MODELLI DI VALUTAZIONE BASATI SU ALBERI BINOMIALI E LORO LIMITI RELATIVI ALLA STRUTTURA DELLA VOLATILITÀ

La teoria sviluppata da Black e Scholes ⁽¹⁾ sulla valutazione delle opzioni ha, tra le altre, due importanti caratteristiche. La prima è che, non dipendendo i prezzi dall'avversione al rischio degli individui, si può valutare un'opzione come se il bene sottostante avesse un rendimento pari al tasso *risk-free*. La seconda è che i prezzi delle azioni evolvono lognormalmente con una volatilità costante pari a σ . L'evoluzione del prezzo azionario può essere descritta dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

dove S è il prezzo dell'azione, μ il suo rendimento atteso e dz un processo di Wiener.

Il modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein ⁽²⁾, come è ben noto, rappresenta una approssimazione discreta del modello di evoluzione continua sopra riportato.

La realtà dei mercati mostra che i prezzi delle opzioni non sono esattamente consistenti con i prezzi che si ottengono tramite le formule di Black e Scholes; tuttavia il successo della loro teoria ha fatto divenire una prassi per i *trader* valutare le opzioni utilizzando la volatilità implicita nei prezzi di mercato di altre opzioni sullo stesso sottostante.

Studi empirici hanno mostrato che la volatilità implicita non è costante ma è funzione sia degli *strike price* che della vita a scadenza delle opzioni ⁽³⁾. Il primo fenomeno è rappresentato dal cosiddetto *volatility smile*, mentre il secondo dalla struttura a termine della volatilità.

Il metodo degli alberi impliciti di Derman-Kani ⁽⁴⁾ è utilizzato dai *trader* per tenere conto sia del *volatility smile* che della struttura a termine della volatilità non piatta e risulta particolarmente utile quando si valutano opzioni esotiche o comunque opzioni caratterizzate da un mercato poco liquido.

⁽¹⁾ BLACK, F. - SCHOLES, M. *The pricing of options and corporate liabilities*, in *Journal of political economy* 1973, n. 81, 637-659.

⁽²⁾ COX, J. - ROSS, S. - RUBINSTEIN, M. *Option pricing: a simplified approach*, in *Journal of financial economics* 1979, n. 7, 229-264.

⁽³⁾ DERMAN, E. - KANI, I. *The volatility smile and its implied tree*, in *Quantitative strategies publications January 1994*, Goldman Sachs.

⁽⁴⁾ DERMAN, E. - KANI, I. *Riding on a smile*, in *Risk* 1994, n. 2, 32-39.

A differenza del classico moto geometrico browniano, nel caso degli alberi impliciti di Derman-Kani si ipotizza che l'azione segua un'evoluzione del tipo:

$$dS = \mu(t)Sdt + \sigma(S, t)dz$$

dove le funzioni μ e σ sono scelte in modo da rendere endogeni all'albero sia il *volatility smile* che la struttura a termine della volatilità.

Anche se gli alberi binomiali impliciti di Derman-Kani costituiscono un notevole passo in avanti rispetto agli alberi di Cox-Ross-Rubinstein essi hanno dei limiti: necessitano di procedure di aggiustamento per evitare situazioni in cui si presentano valori di probabilità di transizione non compresi fra zero ed uno ed inoltre sono molto sensibili ai metodi di estrapolazione e di interpolazione necessari in presenza di poche opzioni sul mercato, caratteristica che li rende pressoché inutilizzabili sul mercato italiano.

Alberi binomiali impliciti più semplici da utilizzare sono quelli di Rubinstein⁽⁵⁾. Essi, a differenza di quelli di Derman-Kani, non necessitano di processi di interpolazione ed estrapolazione e di aggiustamento, però, a fronte di questo notevole vantaggio computazionale, hanno come limite il fatto di non poter incorporare la struttura a termine della volatilità, rendendo impossibile la valutazione di opzioni con *maturity* diversa utilizzando lo stesso albero.

Alla base della costruzione di questo tipo di albero c'è l'individuazione delle probabilità nodali finali, che sono le probabilità totali di raggiungere un dato nodo dell'albero. Per la determinazione delle probabilità nodali finali, dopo aver fissato arbitrariamente i valori finali di S ⁽⁶⁾, si può procedere in due maniere:

1. nel caso in cui si abbiano informazioni tali da avere un numero di equazioni uguale al numero di incognite, si può risolvere un sistema lineare composto da un'equazione che garantisca che la somma delle probabilità nodali finali sia uno, un'altra che assicuri che i valori finali di S attualizzati e ponderati con le probabilità nodali finali coincidano con il valore corrente di S e da altre equazioni che impongano la correttezza della valutazione delle opzioni su S trattate sul mercato nel momento in cui si effettua la valutazione.
2. nel caso (più frequente) in cui il numero delle equazioni risulti essere insufficiente per avere un'unica soluzione, si ricorre a metodi che derivano le probabilità, date le informazioni disponibili (per esempio Shimko 1993, Jackwerth-Rubinstein 1996, Breeden-Litzenberger 1978).

Per costruire l'albero implicito di Rubinstein relativo all'evoluzione di S si devono calcolare le probabilità di cammino (P^c) alla fine dell'albero basandosi sulle probabilità nodali finali (P^n) precedentemente ottenute. E' bene osservare che in un albero binomiale esistono

⁽⁵⁾ RUBINSTEIN, M. *Implied binomial trees*, in *Journal of Finance* 69, 1994, 771-818.

⁽⁶⁾ Per comodità in genere si sceglie una distribuzione lognormale dei valori.

diversi cammini per raggiungere un dato nodo (i, j) ⁽⁷⁾; ne esistono esattamente $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ con $i = 0, \dots, n$ e $j = 0, \dots, i$. Negli alberi impliciti di Rubinstein viene ipotizzato che qualsiasi cammino abbia la stessa probabilità di essere seguito, pertanto le probabilità di cammino si calcolano dividendo ogni probabilità nodale per il numero di cammini che conducono a quel nodo. Ottenute le probabilità di cammino, si calcolano con metodo ricorsivo le probabilità di transizione che, a differenza degli alberi binomiali standard, saranno differenti in ogni nodo. Schematicamente dati due nodi contigui in uno stesso *step* si ricava il nodo precedente: inizialmente si calcola $P^c = P_{up}^c + P_{down}^c$, poi si ricava la probabilità di transizione $p = P_{up}^c / P^c$ ed infine si calcola $S = [pS_{up} + (1-p)S_{down}]e^{-r\Delta t}$.

Oltre al fatto di non poter apprezzare correttamente opzioni in presenza di struttura a termine della volatilità non piatta, in alcuni casi la costruzione degli alberi impliciti di Rubinstein presenta delle difficoltà dovute all'individuazione di probabilità nodali finali non comprese tra zero ed uno.

In questo contesto si inseriscono gli alberi binomiali generalizzati proposti da Jackwerth nel 1997 ⁽⁸⁾. Secondo Jackwerth gli alberi binomiali generalizzati, mantenendo i vantaggi degli alberi impliciti di Rubinstein, permettono di apprezzare in maniera semplice e consistente opzioni sullo stesso sottostante anche con *maturity* differenti, ma come verrà evidenziato nella parte empirica non sono sempre utilizzabili.

Gli alberi binomiali generalizzati per riuscire a apprezzare correttamente opzioni con *maturity* compresa fra l'istante iniziale e l'istante finale utilizzano una particolare funzione di ponderazione $w(j/i)$ che indica la porzione di probabilità nodale del nodo (i, j) che "scende" nel nodo $(i-1, j-1)$ contribuendo, insieme ad una porzione di probabilità nodale del nodo $(i, j-1)$ (esattamente $1-w((j-1)/i)$), a formare la probabilità nodale del nodo $(i-1, j-1)$. Mentre negli alberi standard ed in quelli impliciti di Rubinstein questa funzione è costante ed uguale a j/i , negli alberi binomiali generalizzati essa è arbitraria e viene determinata tramite un processo di ottimizzazione in modo tale che l'albero fornisca, relativamente alle opzioni prese in considerazione, valori teorici coincidenti con quelli di mercato.

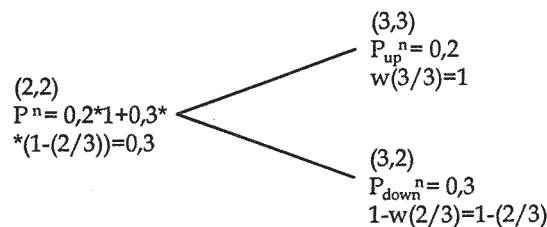


Figura 1. Determinazione delle probabilità nodali negli alberi binomiali di Cox-Ross-Rubinstein ed impliciti di Rubinstein.

⁽⁷⁾ "i" è lo step (istante di tempo) e "j" è il livello all'interno dello step dal più basso al più alto.

⁽⁸⁾ JACKWERTH, J.C. *Generalized binomial trees*, in *Journal of Derivatives* 5, n. 2, 1997, 7-17.

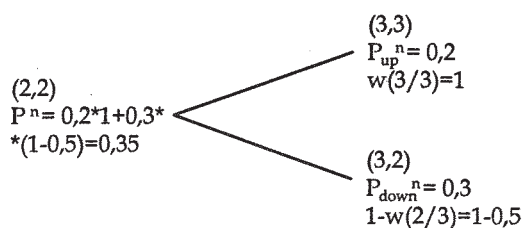


Figura 2. Determinazione delle probabilità nodali negli alberi binomiali generalizzati di Jackwerth ipotizzando che il valore ottimo di $w(2/3)$ sia 0,5.

L'albero relativo all'evoluzione di S dipende dalla funzione di ponderazione $w(j/i)$ che si ottiene in seguito al processo di ottimizzazione. Infatti $w^*(j/i)$ (funzione di ponderazione tale che i prezzi teorici delle opzioni di cui sono noti i prezzi di mercato corrispondano ai prezzi reali) è in relazione sia con le probabilità nodali ($P^n = w(j/i) \cdot P_{up}^n + (1 - w(j/i)) \cdot P_{down}^n$), che con le probabilità di transizione ($p = w(j/i) \cdot P_{up}^n / P^n$), che con i valori di S ($S = [pS_{up} + (1 - p)S_{down}] e^{-r\Delta t}$).

Purtroppo anche questi alberi presentano alcuni limiti:

1. in seguito al processo di ottimizzazione si possono trovare probabilità nodali finali tali da consentire arbitraggi.
2. non si riescono ad incorporare più *volatility smile* mediante un unico albero in quanto si ottengono tante funzioni di ponderazione quante sono le opzioni prese in considerazione in una stessa scadenza.

2. GLI ALBERI BINOMIALI GENERALIZZATI "MODIFICATI"

Nel tentativo di incorporare più di un *volatility smile* in un unico albero, in questo lavoro si introducono gli alberi binomiali generalizzati "modificati" che, relativamente all'istante i , attribuiscono un unico valore a $w(j/i)$ mediante un processo di ottimizzazione basato sulla ricerca del minimo della radice quadrata della somma degli scarti tra i valori teorici ed i valori di mercato delle opzioni, ponderati con il rapporto tra le contrattazioni relative al k -esimo titolo e le contrattazioni totali:

$$\min \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[(\hat{V}_k - V_k)^2 \frac{Nc_k}{Nc_T} \right]}$$

dove:

n numero di opzioni con stessa *maturity* ma diverso *strike price* trattate sul mercato

\hat{V}_k valore teorico della k -esima opzione

V_k	valore di mercato della k-esima opzione
Nc_k	numero delle contrattazioni effettuate relative alla k-esima opzione
Nc_T	numero delle contrattazioni effettuate relative a tutte le n opzioni

Nel quarto paragrafo si vedrà l'efficacia di questo metodo grazie al quale si riesce a tener conto nella costruzione dell'albero di un numero molto maggiore di informazioni rispetto a quanto possibile con gli alberi generalizzati di Jackwerth.

3. UN PROBLEMA DI PRICING

In questo paragrafo verrà affrontato un problema di *pricing* al fine di evidenziare i limiti che i vari tipi di albero mostrano nel rappresentare la struttura della volatilità. In particolare si vuole prezzare una *call* asiatica aritmetica *average strike* sul Mib 30, titolo che rientra nella categoria delle opzioni esotiche *path-dependent*, i cui prezzi sono strettamente dipendenti dalla struttura della volatilità.

Si fa presente che, nonostante nella pratica questo tipo di opzione venga prezzato con metodi numerici diversi dagli alberi binomiali, in questo lavoro si ricorre al loro utilizzo in quanto essi mostrano, forse meglio di altri metodi, la criticità della struttura della volatilità nella valutazione di titoli derivati.

Se non si avesse a disposizione alcuna informazione sui prezzi di mercato di altre opzioni sul Mib 30, la valutazione della *call* asiatica aritmetica *average strike* sul Mib 30 con scadenza tre mesi potrebbe essere effettuata mediante l'uso di un albero binomiale standard ⁽⁹⁾.

I parametri a cui si farà riferimento per la costruzione dell'albero sono:

$\sigma = 0,38$	volatilità annuale (fonte: <i>Bloomberg</i>)
0	istante iniziale
$\Delta t = 1/12$	lunghezza di uno <i>step</i> (1 mese)
$i = 3,077\%$	tasso certo
$r = 0,03031$	intensità istantanea di interesse relativa ad i
$S_0 = 38384$	valore del Mib 30 nell'istante iniziale
$p = 0,484$	probabilità <i>up</i> e <i>down</i> in ogni nodo dell'albero
$1 - p = 0,516$	

E' bene sottolineare che σ in questo caso, sebbene fornita da una autorevole fonte, è calcolata in base a dati storici.

Con questi parametri l'albero standard che descrive l'evoluzione del Mib 30 fino alla scadenza dell'opzione è il seguente:

⁽⁹⁾ Gli alberi binomiali di Cox-Ross-Rubinstein saranno denominati indifferentemente alberi binomiali standard.

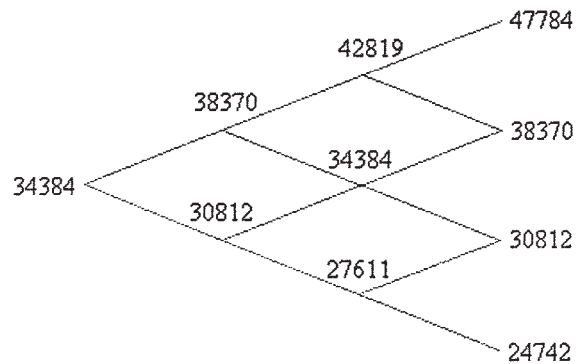


Figura 3. Evoluzione del Mib 30 in un albero binomiale standard in assenza di informazioni sul mercato delle opzioni.

Si vuole ora, in base a tale albero, prezzare l'opzione asiatica sul Mib 30. Dato che la *call* asiatica è di tipo *average strike* si calcolano nei quattro nodi finali tutti i possibili prezzi d'esercizio ed i relativi *pay-off* tenendo conto che nei nodi centrali vi si può arrivare con tre cammini diversi:

Nodo	Valore finale Mib 30	Strike price	Pay-off
(3,3)	47784	40839	6944
(3,2)	38370	38486	0
		36377	1993
		34488	3883
(3,1)	30812	34488	0
		32598	0
		30904	0
(3,0)	24742	29387	0

Per calcolare il valore della *call* asiatica si dovranno scontare i possibili *pay-off* ponderandoli con le seguenti probabilità di cammino:

Nodo	Probabilità di cammino
(3,3)	0,113
(3,2)	0,121
(3,1)	0,129
(3,0)	0,137

Procedendo in questa maniera il valore della *call* asiatica risulta essere 1487 lire.

Alla stessa data di valutazione il prezzo di mercato di una *call* europea sul Mib 30 con scadenza 3 mesi e prezzo d'esercizio 37000 (*c uno*) è di 1930 lire. Se si testa l'albero standard

per vedere se la *call* viene prezzata correttamente, ci si accorge che *c uno* viene valutata 1708 lire anziché 1930 lire, il suo valore di mercato.

E' pertanto necessario costruire un nuovo albero standard che prezzati correttamente *c uno* con cui poter poi valutare la *call* asiatica in modo più corretto. Il nuovo albero standard, relativo all'evoluzione del Mib 30 che prezza correttamente *c uno*, ha una volatilità pari a 0,40869, valore differente alla volatilità del Mib 30 fornita da *Bloomberg*; *p* e $1-p$ sono rispettivamente pari a 0,481 e 0,519.

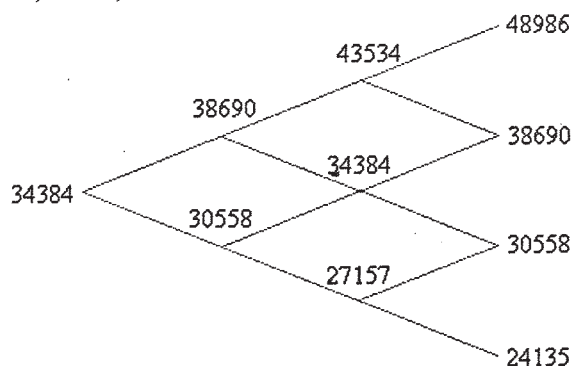


Figura 4. Evoluzione del Mib 30 nell'albero binomiale standard in presenza del prezzo di mercato di *c uno* ("Mib 30 *c uno*").

In questo caso per l'opzione asiatica si farà riferimento allo stesso procedimento visto nel caso precedente e si perverrà alla seguente tabella:

Nodo	Valore finale Mib 30	Strike price	Pay-off
(3,3)	48986	41398	7587
(3,2)	38690	38824	0
		36537	2153
		34504	4186
(3,1)	30558	34504	0
		32471	0
		30664	0
(3,0)	24135	29058	0

Il valore della *call* asiatica si determina scontando i possibili *pay-off* ponderandoli con le seguenti probabilità di cammino calcolate in base alle nuove probabilità di transizione:

Nodo	Probabilità di cammino
(3,3)	0,111
(3,2)	0,12
(3,1)	0,13
(3,0)	0,14

Il valore della *call* asiatica risulta essere in questo caso 1595 lire. Tale valore è superiore a quello calcolato con il primo albero standard. Questo risultato è chiaramente dovuto al fatto che nel secondo albero la volatilità è superiore rispetto a quella del primo albero.

Se il prezzo di mercato di una *put* (*p due*) con caratteristiche analoghe a *c uno* ma con prezzo d'esercizio pari a 36000 è di 3674 lire, ci si accorge che prezzandola con l'albero "Mib 30 *c uno*" il suo prezzo teorico è di 3743 lire. Da ciò si deduce che l'albero "Mib 30 *c uno*" non fornisce dati coerenti con quelli di mercato. Si è infatti in presenza di un *volatility smile*, cioè fissata una data scadenza la volatilità implicita varia al variare del prezzo d'esercizio.

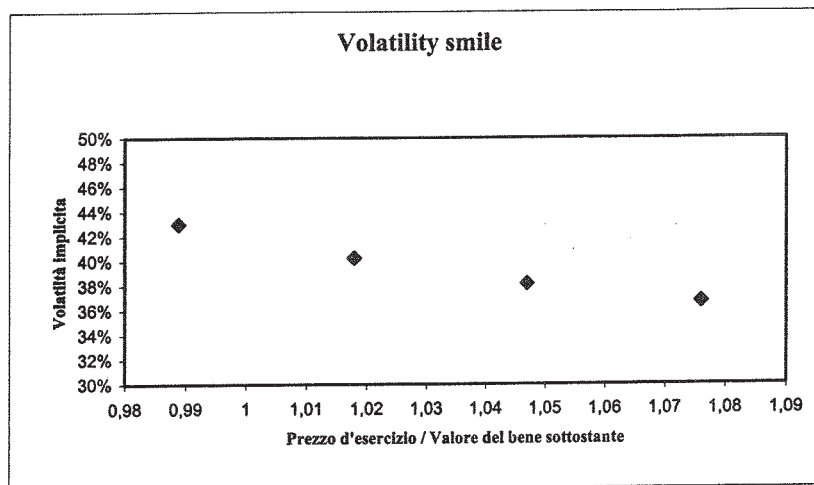


Figura 5. *Volatility smile*⁽¹⁰⁾.

Dato che l'albero "Mib 30 *c uno*" non prezza correttamente entrambe le opzioni di cui si dispone dei prezzi di mercato, per valutare correttamente la *call* asiatica si deve costruire un nuovo albero che incorpori tutte le informazioni disponibili.

Si costruisce quindi un albero implicito di Rubinstein che, limitatamente ad opzioni con stessa scadenza, è in grado di fornire valutazioni corrette anche in presenza di *volatility smile*.

Con i dati a disposizione le probabilità nodali finali che valutano correttamente *c uno*, *p due* ed il Mib 30 e la cui somma sia uno si ottengono risolvendo il sistema di equazioni:

⁽¹⁰⁾ La figura mostra il *volatility smile* presente sul mercato nell'istante iniziale relativo ad opzioni sul Mib 30 con scadenza un mese.

$$\begin{cases} p_3^n + p_2^n + p_1^n + p_0^n = 1 \\ (48986p_3^n + 38690p_2^n + 30558p_1^n + 24135p_0^n) * e^{(-r*3/12)} = 34384 \\ (11986p_3^n + 1690p_2^n) * e^{(-r*3/12)} = 1930 \\ (5442p_1^n + 11865p_0^n) * e^{(-r*3/12)} = 3674 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$p_3^n = 0,12279; p_2^n = 0,27997; p_1^n = 0,52695; p_0^n = 0,07029.$$

Procedendo a ritroso e considerando i vari cammini possibili si ottengono le probabilità nodali in tutti i nodi:

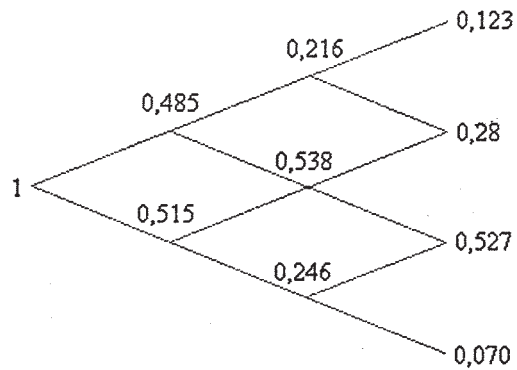


Figura 6. Probabilità nodali nell'albero implicito.

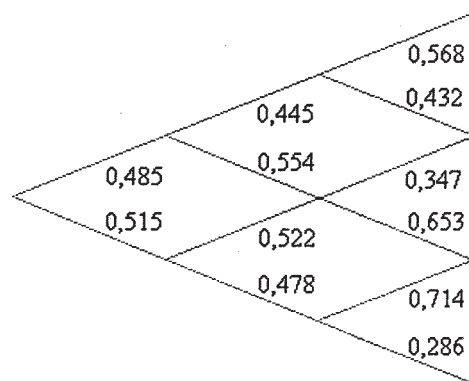


Figura 7. Probabilità di transizione nell'albero implicito.

L'albero implicito relativo all'evoluzione del Mib 30 è:

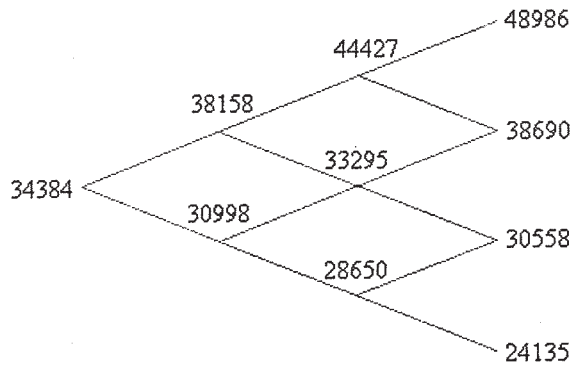


Figura 8. Evoluzione del Mib 30 nell'albero implicito in presenza dei prezzi di mercato di *c* uno e *p* due.

L'albero implicito costruito, prezzando correttamente le opzioni di cui si conoscono i prezzi di mercato, è coerente con le informazioni lette sul mercato, pertanto a partire da esso si può procedere alla valutazione della *call* asiatica.

In questo caso i possibili prezzi d'esercizio ed i relativi *pay-off* della *call* asiatica sono riportati nella seguente tabella:

<i>Nodo</i>	<i>Valore finale Mib 30</i>	<i>Strike price</i>	<i>Pay-off</i>
(3,3)	48986	41489	7497
(3,2)	38690	38915	0
		36132	2558
		34342	4348
(3,1)	30558	34099	0
		32309	0
		31147	0
(3,0)	24135	29542	0

Per calcolare il valore della *call* asiatica si dovranno scontare i possibili *pay-off*, ponderandoli con le seguenti probabilità di cammino calcolate con le nuove probabilità nodali:

<i>Nodo</i>	<i>Probabilità di cammino</i>
(3,3)	0,123
(3,2)	0,093
(3,1)	0,176
(3,0)	0,070

Il valore della *call* asiatica è di 1553 lire. Tale valore è compreso tra quello trovato in assenza di informazioni e quello calcolato conoscendo esclusivamente il prezzo di mercato di *c uno*.

Come si può osservare, nell'albero implicito, a differenza dell'albero standard, la volatilità non è costante. Questa caratteristica rende l'evoluzione del Mib 30 sull'albero implicito sicuramente più aderente alla realtà, in quanto l'ipotesi di costanza della volatilità alla base sia degli alberi standard che dell'analisi di Black e Scholes, è una eccessiva semplificazione che si scontra con le effettive dinamiche di mercato.

Rilevando che il prezzo di mercato di una *call* europea sul Mib 30 (*c tre*) con prezzo d'esercizio pari a 37000 e scadenza 1 mese è di 523 lire, si può osservare che, se si determina con l'albero implicito il suo prezzo teorico, si ottiene il valore di 560 lire che è diverso da quello di mercato.

Questo comporta che la valutazione della *call* asiatica effettuata con l'albero implicito non risulta essere attendibile. La volatilità, infatti, non solo è funzione dello *strike price* all'interno di ogni scadenza, ma è anche funzione delle scadenze. Ciò può essere visto graficamente rappresentando la seguente struttura a termine delle volatilità caratterizzante il mercato italiano il 19 febbraio 1999:

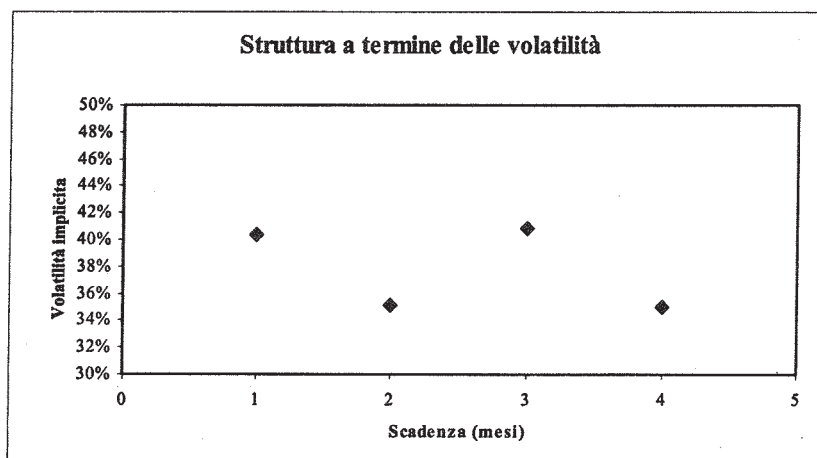


Figura 9. *Struttura a termine delle volatilità* ⁽¹⁾.

Dato che l'albero implicito non può più essere utilizzato, si procede alla costruzione di un albero binomiale generalizzato che prezzi correttamente *c uno*, *p due* e *c tre*.

⁽¹⁾ Il grafico è stato elaborato tenendo in considerazione tutte le opzioni realmente disponibili sul mercato, non solo *c uno*, *p due* e *c tre*.

Si ricorda che gli alberi binomiali generalizzati si basano su una funzione di ponderazione $w(j/i)$ che indica la porzione di probabilità nodali del nodo (i, j) che “scendono” nel nodo $(i-1, j-1)$.

Mediante un procedimento numerico di ottimizzazione si ottiene che $w(0,5)$, affinché le tre opzioni siano prezzate correttamente, deve essere uguale a $0,487893^{(12)}$. Considerando che $w(0) = 0$, dato che dal nodo più in basso all’interno di un livello non si può scendere ulteriormente, e che $w(1) = 1$, visto che dal nodo più in alto all’interno di un livello non si può che scendere, si può costruire la funzione di ponderazione dell’albero generalizzato:

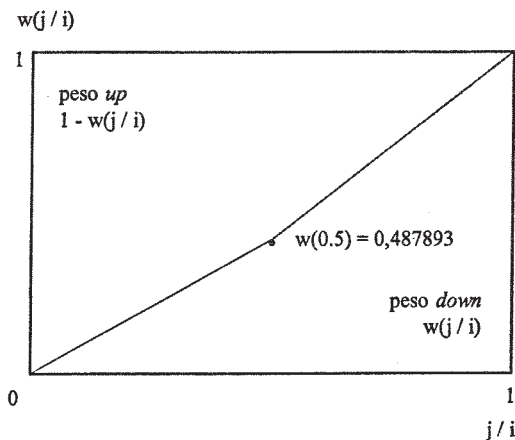


Figura 10. Funzione di ponderazione dell’albero binomiale generalizzato.

Vista la particolare forma della funzione di ponderazione è più probabile che il Mib 30 per giungere al nodo finale compia un cammino prima ascendente e poi discendente.

Per costruire l’albero di evoluzione del Mib 30 è necessaria la determinazione delle probabilità nodali e delle probabilità di transizione.

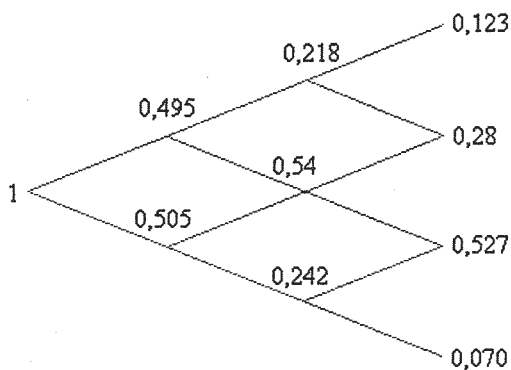


Figura 11. Probabilità nodali nell’albero binomiale generalizzato.

⁽¹²⁾ Si ricorda che $w(0,5)$ è la porzione di probabilità nodale relativa al nodo $(1,2)$ che “scende” nel nodo $(1,0)$.

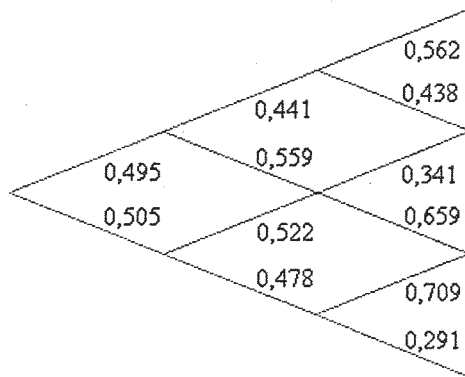


Figura 12. Probabilità di transizione nell'albero binomiale generalizzato.

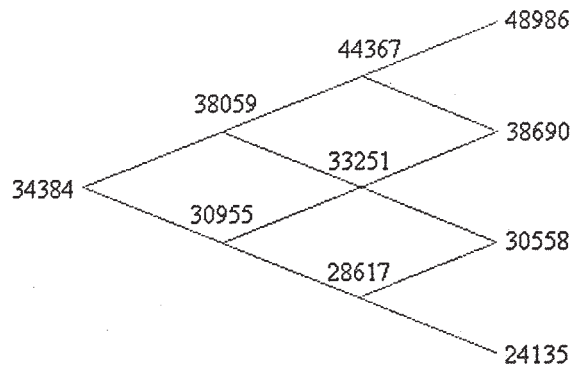


Figura 13. Evoluzione del Mib 30 nell'albero binomiale generalizzato.

Come si può osservare dalla figura 11, le probabilità nodali finali dell'albero generalizzato sono uguali a quelle dell'albero implicito. Ciò assicura che l'albero generalizzato prezzi correttamente oltre *c tre*, anche *c uno* e *p due* e pertanto si può procedere alla valutazione della *call* asiatica, sicuri di ottenere un prezzo coerente con i dati letti sul mercato.

L'opzione asiatica da valutare è di tipo *average strike*, quindi si calcolano nei quattro nodi finali tutti i possibili prezzi d'esercizio ed i relativi *pay-off*, tenendo conto che nei nodi centrali vi si può arrivare con tre cammini diversi:

Nodo	Valore finale Mib 30	Strike price	Pay-off
(3,3)	48986	41449	7537
(3,2)	38690	38875	0
		36096	2594
		34320	4370
(3,1)	30558	34063	0
		32287	0
		31129	0
(3,0)	24135	29523	0

Per calcolare il valore della *call* asiatica si scontano i possibili *pay-off*, ponderandoli con le probabilità di cammino che sono le stesse dell'albero implicito:

<i>Nodo</i>	<i>Probabilità di cammino</i>
(3,3)	0,123
(3,2)	0,093
(3,1)	0,176
(3,0)	0,070

Il valore della *call* asiatica, coerente con i valori di mercato di *c uno*, *p due* e *c tre*, risulta così essere 1563 lire.

A questo punto si potrebbe essere soddisfatti della valutazione, tuttavia è opportuno precisare che, dato che il prezzo di mercato di una *call* (*c quattro*) con caratteristiche analoghe a *c tre* ma con *strike price* 36000 è 852 lire, l'utilizzo dell'albero generalizzato prima costruito porta ad un valore teorico di *c quattro* pari a 1017 lire.

Conoscendo inoltre che il prezzo di mercato di un'altra *call* (*c cinque*) con caratteristiche analoghe a *c tre* ma con *strike price* 35000 è di 1310 lire, l'utilizzo dell'albero generalizzato costruito porta ad un valore teorico di *c cinque* che risulta pari a 1510 lire.

Verificato che si possono costruire nuovi alberi generalizzati che prezzano correttamente *c quattro* e *c cinque*, si osserva che essi non sono in grado di valutare correttamente *c tre*.

Bisogna concludere quindi che non si è in grado di valutare la *call* asiatica tenendo conto contemporaneamente né del valore di mercato di *c quattro* né di quello di *c cinque*.

Si riassumono nella seguente tabella le diverse valutazioni della *call* asiatica a seconda delle informazioni disponibili per evidenziarne le diversità:

<i>Prezzi di mercato considerati</i>	<i>Tipo di albero utilizzato</i>	<i>Valore call asiatica</i>
nessuno	standard	1487
<i>c uno</i> (T=3, X=37000)	standard	1595
<i>c uno</i> (T=3, X=37000) <i>p due</i> (T=3, X=36000)	implicito	1553
<i>c uno</i> (T=3, X=37000) <i>p due</i> (T=3, X=36000) <i>c tre</i> (T=1, X=37000)	generalizzato	1563
<i>c uno</i> (T=3, X=37000) <i>p due</i> (T=3, X=36000) <i>c tre</i> (T=1, X=37000) <i>c quattro</i> (T=1, X=36000) <i>c cinque</i> (T=1, X=35000)	?	?

In un mondo ideale in assenza di *volatility smile* e con struttura a termine delle volatilità piatta, gli alberi standard costituiscono uno strumento di *pricing* che fornisce, salvo inefficienze, prezzi teorici coerenti con i prezzi di mercato.

Tuttavia nel mercato delle opzioni italiano, come del resto avviene nei mercati delle opzioni degli altri paesi, sono stati riscontrati fenomeni di *volatility smile* ed è stata individuata una struttura a termine delle volatilità non piatta.

Per questi motivi la valutazione della *call* asiatica effettuata mediante l'albero standard, non è stata considerata soddisfacente.

Se si vuole più coerenza con il mercato, sono necessarie informazioni sui prezzi di mercato di opzioni con diverso *strike* e scadenza, ma stesso sottostante. Per tenere conto di tali informazioni è stato costruito prima un albero binomiale implicito di Rubinstein, poi un albero binomiale generalizzato. Il percorso seguito è stato coerente con la ricerca di un metodo di valutazione che tenesse conto, non solo del *volatility smile*, ma anche della particolare struttura a termine delle volatilità del mercato italiano.

I diversi valori della *call* asiatica ottenuti utilizzando i vari metodi sottolineano la criticità della scelta di uno strumento di *pricing* che sia affidabile in relazione alle informazioni sui prezzi di mercato disponibili al momento della valutazione.

Gli alberi binomiali generalizzati si sono rivelati essere il metodo di valutazione che ha saputo tener conto contemporaneamente del maggior numero di prezzi di mercato, tuttavia essi hanno mostrato un evidente limite: non è stato possibile costruire un albero generalizzato relativo all'evoluzione del Mib 30 coerente con i prezzi di mercato di *c uno* e *p due*, e contemporaneamente con i prezzi di *c tre* e *c cinque*. In generale un albero binomiale generalizzato riesce ad incorporare il *volatility smile* relativo ad una sola scadenza.

4. SOLUZIONE DEL PROBLEMA MEDIANTE UN ALBERO BINOMIALE GENERALIZZATO "MODIFICATO"

Le lacune relative agli alberi binomiali generalizzati appena evidenziate sono piuttosto profonde. A partire da ciò si può mostrare come la modifica al modello degli alberi binomiali generalizzati proposta nel secondo paragrafo consenta la risoluzione del problema evidenziato.

Nel paragrafo precedente è stato mostrato che non si riesce a costruire un unico albero che prezzi correttamente e contemporaneamente *c uno*, *p due*, *c tre* e *c quattro* e *c cinque*. Effettuando le relative procedure di ottimizzazione vengono infatti individuate per *c tre*, *c quattro* e *c cinque* i seguenti valori di $w(0,5)$: 0,487893, 0,421122 e 0,373659. Questo fatto è ovviamente dovuto alla presenza di un *volatility smile* relativo alla scadenza di un mese.

Gli alberi binomiali generalizzati “modificati” che introduciamo riescono ad incorporare questo volatility smile utilizzando un particolare ed unico valore di $w(0,5)$ che si ottiene risolvendo il seguente problema di minimizzazione:

$$\min \sqrt{\sum_{k=1}^n \left[(\hat{V}_k - V_k)^2 \frac{Nc_k}{Nc_T} \right]}$$

dove:

n numero di opzioni con stessa *maturity* ma diverso *strike price* trattate sul mercato

\hat{V}_k valore teorico della k -esima opzione

V_k valore di mercato della k -esima opzione

Nc_k numero delle contrattazioni effettuate relativa alla k -esima opzione

Nc_T numero delle contrattazioni effettuate relative a tutte le n opzioni

Nel caso preso in esame n è uguale a 3 (*c tre, c quattro e c cinque*) e si otterrà un valore di $w(0,5)$ pari a 0,435357 corrispondente al seguente albero di evoluzione del Mib 30:

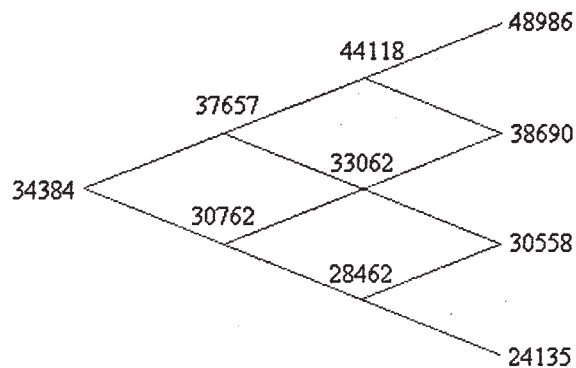


Figura 14. *Evoluzione del Mib 30 nell'albero binomiale generalizzato "modificato".*

Procedendo in maniera analoga ai casi precedenti si ottiene che la call asiatica viene valutata 1901 lire.

Gli alberi binomiali generalizzati “modificati” qui introdotti, grazie alle loro peculiarità, garantiscono una maggiore flessibilità d’uso rispetto a quelli di Jackwerth.

Le problematiche connesse con la coerenza tra i prezzi teorici e di mercato restano tuttora ancora aperte in quanto gli alberi binomiali generalizzati modificati non riescono ad incorporare esattamente tutti i *volatility smile*, ma sicuramente, riuscendo a tenere conto dei prezzi di un maggior numero di opzioni, approssimano la realtà in modo più accurato.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- BLACK, Fischer - SCHOLES, Myron *The pricing of options and corporate liabilities*, in *Journal of political economy* 1973, n. 81, 637-659.
- BREEDEN, Douglas - LITZENBERGER, Robert *Prices of State-contingent claims implicit in option prices*, in *Journal of business* 1978, n. 51, 621-651.
- COX, John - ROSS, Stephen - RUBINSTEIN, Mark *Option pricing: a simplified approach*, in *Journal of financial economics* 1979, n. 7, 229-264.
- DERMAN, Emanuel - KANI, Iraj *The volatility smile and its implied tree*, in *Quantitative strategies publications January 1994*, Goldman Sachs.
- DERMAN, Emanuel - KANI, Iraj *Riding on a smile*, in *Risk* 1994, n. 2, 32-39.
- DUPIRE, Bruno *Pricing with a smile*, in *Risk* 1994, n. 7, 18-20.
- HULL, John *Options, futures, and other derivatives*, Upper Saddle River, Prentice-Hall, 1997.
- JACKWERTH, Jens Carsten *Generalized binomial trees*, in *Journal of Derivatives* 5, n. 2, 1997, 7-17.
- RAVINDRAN, Kanno *Customized derivatives*, New York, McGraw-Hill, 1998.
- RUBINSTEIN, Mark *Implied binomial trees*, in *Journal of finance* 69, 1994, 771-818.
- SHIMKO, David *Bounds of probability*, in *Risk* 1993, n. 6, 33-37.

WORKING PAPER PUBBLICATI

- 1 - 1997 Mariano D'Antonio e Margherita Scarlato
Struttura economica e commercio estero: un'analisi per le province italiane.
- 2 - 1997 Pierangelo Garegnani e Antonella Palumbo *Accumulation of capital.*
- 3 - 1997 Elio Cerrito
Crisi di cambio e problemi di politica monetaria nell'Italia di fine Ottocento. Appunti su alcune evidenze empiriche.
- 4 - 1998 Francesco Manni
Struttura delle fonti di finanziamento: Un'indagine sulle principali società italiane produttrici di bevande.
- 5 - 1998 J. O. Berger e J. Mortera
Default Bayes factors for one-sided hypothesis testing.
- 6 - 1998 Attilio Trezzini
Capacity utilisation in the long run: a reply to Serrano.
- 7 - 1998 A. M. Ferragina
Quality product differentiation in CEE-EU Intra-Industry trade
- 8 - 1998 M. F. Renzi, L. Cappelli, G. Salerno
Outsourcing: Opportunità e limiti per le aziende che operano con sistemi di qualità conformi alle norme ISO 9000
- 9 - 1998 Margherita Scarlato
The impact of international trade on employment and wage differentials: some evidence from the italian macro-regions
- 10 - 1998 Attilio Trezzini
Some notes on long-run capacity utilisation, steady state and induced investment
- 11 - 1999 Salvatore Monni
A Convergence analysis of human development
- 12 - 1999 Guido M. Rey
Informazione e politiche pubbliche: non è mai troppo tardi
- 13 - 2000 Maria Maddalena Barbieri e Caterina Conigliani
Fractional bayes factors for the analysis of autoregressive models with possible unit roots
- 14 - 2000 Margherita Scarlato
Capitale Sociale e Sviluppo Economico
- 15 - 2000 Anna M. Ferragina
Price versus quality competition in Italy's trade with Central and Eastern Europe over the Transition
- 16 - 2000 Mariano D'Antonio e Margherita Scarlato
*Capitale umano e sviluppo economico
Un modello di equilibrio economico generale per il Centro-Nord e il Mezzogiorno d'Italia*
- 17 - 2000 Marisa Cenci e Luana Foffo Ciucci
Gli effetti della regolamentazione sull'attività di Insider Trading
- 18 - 2000 Andrea Gheno
Alberi binomiali e struttura della volatilità

Finito di stampare nel mese di maggio 2000, presso
Tipolitografia artigiana Colitti Armando snc di *Colitti Marco & C.*
00154 Roma • Via Giuseppe Libetta 15 a • Tel. 065745311/065740258
e-mail tcollitti@tin.it • www.colitti.it