



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

**METODOLOGIE PER LA VALUTAZIONE
DELLE OBBLIGAZIONI CONVERTIBILI
IN IPOTESI DI EVOLUZIONE STOCASTICA
DELLA STRUTTURA PER SCADENZA**

di Marisa Cenci e Andrea Gheno

AREA
ECONOMICO POLITICA

ATER

DELLI STUDI
ECONOMICI

Working Paper n° 20, 2000



- I “Working Papers” del Dipartimento di Economia svolgono la funzione di divulgare tempestivamente, in forma definitiva o provvisoria, i risultati di ricerche scientifiche originali. La loro pubblicazione è soggetta all’approvazione del Comitato Scientifico.
- Per ciascuna pubblicazione vengono soddisfatti gli obblighi previsti dall’art. 1 del D.L.L. 31.8.1945, n. 660 e successive modifiche.
- Copie della presente pubblicazione possono essere richieste alla Redazione.

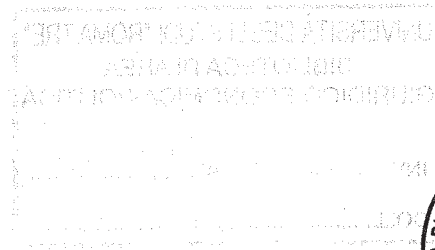
REDAZIONE:

Dipartimento di Economia
Università degli Studi di Roma Tre
Via Ostiense, 139 - 00154 Roma
Tel. 0039-6-57374003 fax 0039-6-57374093
E-mail: dip_eco@uniroma3.it

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA

**METODOLOGIE PER LA VALUTAZIONE
DELLE OBBLIGAZIONI CONVERTIBILI
IN IPOTESI DI EVOLUZIONE STOCASTICA
DELLA STRUTTURA PER SCADENZA ***

di Marisa Cenci** e Andrea Gheno***



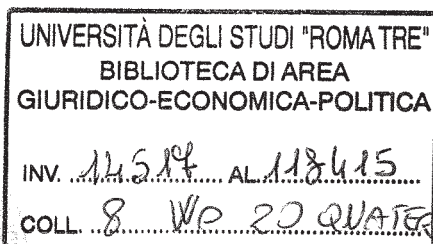
* Ricerca svolta nell'ambito del progetto "Contratti strutturati. Problemi di valutazione. Logiche di controllo". Finanziamento MURST 1999 ex 60% progetto nazionale "Modelli per la finanza matematica".

** E-mail: cenci@uniroma3.it

*** E-mail: gheno@uniroma3.it

SOMMARIO

1. Introduzione	1
2. Notazioni e strategie di conversione e di richiamo	2
3. Modello discreto	2
4. Analisi di sensitività	6
5. Modello continuo	8
6. Risultati della simulazione per il modello continuo	9
7. Conclusioni	11
Bibliografia	13



Abstract

Questo lavoro propone due modelli per la valutazione di obbligazioni convertibili in ipotesi di evoluzione stocastica della struttura per scadenza e del valore dell'azienda nelle cui azioni il titolo può essere convertito. I modelli proposti vengono sviluppati in ipotesi di dipendenza tra i processi stocastici considerati. Tale dipendenza, nel modello continuo si esplicita tramite un coefficiente di correlazione tra i processi di Wiener, mentre nel modello discreto è implicitamente contenuta in un'ipotesi di volatilità stocastica, condizionata dalla evoluzione della struttura per scadenza, del rendimento dell'azienda. Si segnalano le conclusioni a cui si perviene nelle analisi di sensitività effettuate.

Parole chiave: Obbligazioni convertibili, Processi stocastici, Modelli per l'evoluzione della struttura per scadenza, Simulazione Monte Carlo.

1. Introduzione

Un'obbligazione convertibile¹ è un particolare tipo di titolo che incorpora diritti di opzione esercitabili sia da parte del detentore sia da parte dell'azienda emittente durante certi periodi o in alcune date prestabilite.

Queste opzioni consentono al sottoscrittore di convertire il flusso obbligazionario residuo in un predeterminato numero di azioni (generalmente di nuova emissione) e all'azienda di richiamare il titolo, obbligando l'investitore a scegliere tra il prezzo di richiamo e il valore di conversione.

La presenza della clausola di richiamo stabilisce pertanto una dipendenza tra le decisioni dell'azienda e quelle del sottoscrittore. La complessità delle opzioni incorporate nelle obbligazioni convertibili non consente di individuare una formula chiusa per la loro valutazione. Inoltre, mentre la natura obbligazionaria rende il valore dell'obbligazione convertibile sensibile a variazioni della struttura per scadenza, le opzioni in essa incorporate fanno sì che il valore del titolo sia fortemente sensibile a variazioni della quotazione dell'azione sottostante.

Una corretta valutazione delle obbligazioni convertibili deve pertanto tenere conto di due fonti di incertezza, la prima riguardante l'evoluzione del valore dell'azienda nelle cui azioni il titolo è convertibile e la seconda relativa all'evoluzione della struttura per scadenza.

Nonostante ciò, finora l'unico lavoro che ha affrontato il problema della valutazione dei convertibili in ipotesi di due fonti di incertezza è dovuto a Brennan e Schwartz [4] i quali risolvono mediante approssimazione numerica l'equazione di valutazione del convertibile.

Il presente lavoro si propone di ampliare la modellistica che fa riferimento alle due fonti di incertezza suggerendo un modello di valutazione discreto e uno continuo caratterizzati dalla presenza di dipendenza tra l'evoluzione della struttura per scadenza e l'evoluzione del valore dell'azienda sottostante.

In particolare nell'ambito discreto verrà utilizzato il modello di Black-Derman-Toy (BDT) [1] per l'evoluzione della struttura per scadenza ed un modello binomiale per l'evoluzione del valore dell'azienda; nell'ambito continuo si farà riferimento ad una valutazione effettuata adattando il metodo Monte Carlo alle particolari caratteristiche delle obbligazioni convertibili.

Il lavoro è così strutturato: nel secondo paragrafo si introducono le notazioni utilizzate e le strategie di conversione e di richiamo seguite dal sottoscrittore e dall'azienda emittente; nel terzo paragrafo si analizza in dettaglio il modello discreto; nel quarto paragrafo si effettua un'analisi di sensitività del modello a variazioni della volatilità sia della struttura per scadenza, sia dell'azienda; nel quinto paragrafo si introduce il modello continuo; nel sesto paragrafo si riportano i risultati ottenuti mediante simulazione Monte Carlo e si cerca di analizzare la dipendenza del prezzo dalla struttura di volatilità dei tassi a pronti e dal coefficiente di correlazione; nel settimo paragrafo vengono fatte alcune considerazioni di carattere conclusivo.

¹ Le obbligazioni convertibili saranno indifferentemente denominate titoli convertibili o semplicemente convertibili.

2. Notazioni e strategie di conversione e di richiamo

La valutazione delle obbligazioni convertibili non può prescindere dalla conoscenza delle strategie di conversione e di richiamo seguite dalle controparti. In ipotesi di mercati perfetti tali strategie sono state suggerite da Brennan e Schwartz [3] e Ingersoll [8].

Al fine di formalizzare la convenienza della conversione e del richiamo si farà riferimento a un'azienda emittente il cui passivo è composto solo da azioni e obbligazioni convertibili in azioni della stessa.

Le notazioni utilizzate saranno le seguenti:

- $V(t)$ = valore dell'azienda al tempo t ;
- n = numero di azioni presenti sul mercato all'emissione dei convertibili;
- m = numero dei convertibili emessi;
- k = numero di azioni in cui si può convertire ogni obbligazione;
- $OC(t)$ = valore del convertibile al tempo t ;
- C = valore nominale dell'obbligazione;
- I = interessi corrisposti sul valore nominale;
- K = prezzo di richiamo dell'obbligazione (*call price*)
- $VC(t)$ = valore di conversione al tempo t .

L'investitore, al tempo t , converte se il valore di conversione supera il valore attuale del flusso residuo dell'obbligazione; il valore di conversione è determinato dal prodotto del numero delle azioni consegnate per il valore di ogni singola azione post-conversione ed è individuato da:

$$VC(t) = k \frac{V(t)}{mk + n}. \quad (1)$$

L'emittente richiama il titolo non appena il valore di conversione (1) risulta essere maggiore o uguale rispetto al *call price*; il richiamo concede al sottoscrittore del titolo la facoltà di optare tra la conversione immediata e la cessione al prezzo K del flusso residuo. Egli, ovviamente, sceglierà l'alternativa più conveniente agendo come massimizzatore di profitto. Nel caso in cui la clausola di richiamo venga attivata la strategia dell'investitore è fortemente dipendente da quella seguita dall'ente emittente.

3. Modello discreto

Il modello che si propone fa riferimento a un'evoluzione della struttura per scadenza che segue il modello di BDT [1] e a un'evoluzione del valore dell'azienda rappresentata mediante un albero adattato a quello della struttura per scadenza.

Come è noto l'albero alla BDT consente di inserire all'interno del modello la struttura per scadenza dedotta in base alle quotazioni di *zero coupon bond* (*z.c.b.*) aventi *maturity* coincidenti con lo scadenziario a cui l'albero si riferisce e permette, sulla base di un assegnato vettore di volatilità, di individuare i tassi *spot* relativi alle scadenze future. La determinazione di tali tassi è basata sull'ipotesi che i tassi a pronti futuri abbiano distribuzione lognormale.

L'albero che regola l'evoluzione del valore dell'azienda è stato adattato a quello determinato per la struttura per scadenza ipotizzando che la volatilità del rendimento dell'azienda sia stocastica, in particolare essa sarà influenzata dai possibili valori dei tassi a pronti futuri. In questo modo si stabilisce una dipendenza tra le variabili aleatorie che rappresentano i tassi *spot* futuri e le volatilità del rendimento dell'azienda.

Questa caratteristica è particolarmente utile a descrivere l'evoluzione del valore di aziende con strutture del capitale diversificate, in quanto un aumento o una riduzione dei tassi potrebbe ridurre o aumentare la volatilità del rendimento dell'azienda a seconda delle fonti di finanziamento utilizzate dalla stessa.

La costruzione dell'albero per l'evoluzione del valore dell'azienda non è immediata in quanto si deve tenere conto del fatto che il titolo obbligazionario, finché non viene convertito, paga cedole. Ciò provoca un abbattimento del valore dell'azienda ed implica che ad ogni data successiva allo stacco cedola il numero dei nodi raddoppi.

La dipendenza del valore dell'azienda dalla struttura per scadenza inoltre implica che negli istanti di tempo successivi al primo il valore dell'azienda possa compiere movimenti *up* e *down* diversificati in base al tasso *spot* ottenuto sull'albero di BDT.

Oltre alle specifiche proprie dell'obbligazione convertibile gli *input* richiesti dal modello sono:

1. i prezzi degli *z.c.b.* aventi *maturity* coincidenti con lo scadenziario cui l'albero si riferisce;
2. le volatilità dei tassi a pronti futuri;
3. il valore dell'azienda nell'istante iniziale;
4. la volatilità del rendimento della stessa relativamente al primo *step*;
5. per gli *step* successivi, le determinazioni che tale volatilità assume in corrispondenza ai possibili valori dei tassi a pronti dedotti dal modello di BDT.

Sebbene la validità del modello possa essere riferita in ambito multiperiodale, per meglio illustrare la procedura descritta si fa riferimento ad un modello biperiodale in cui la clausola di richiamo si può esercitare alla fine del primo periodo (1 anno) mentre la conversione è realizzabile alla fine di ogni periodo.

Per illustrare il procedimento consideriamo i seguenti dati:

- i prezzi di due *z.c.b.* di valore nominale pari a 100 euro scadenti rispettivamente fra uno e due anni $v(0,1) = 97$ euro, $v(0,2) = 94$ euro;
- la volatilità dei tassi a pronti futuri $\sigma(1,2) = 0,19$;
- $V(0) = 1$ miliardo di euro;
- $n = 1$ milione
- $m = 100.000$

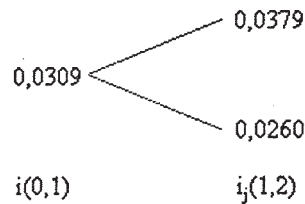
- $k = 1$
- $C = 1.000$ euro
- $I = 25$ euro annui
- $K = 1.025$ euro (*call price*)

La volatilità del rendimento dell'azienda sarà ipotizzata costante sul primo periodo ed indicata con $\sigma_V(0,1)$ mentre nel secondo periodo sarà individuata da una variabile aleatoria $\tilde{\sigma}_V(1,2)$ che assumerà determinazioni distinte a seconda dei possibili valori assunti dal tasso a pronti nel periodo considerato che saranno $i_1(1,2)$ nello stato *down* e $i_2(1,2)$ nello stato *up*. In particolare sarà:

- $\sigma_V(0,1) = 0,3$
- $\tilde{\sigma}_V(0,2) = \begin{cases} 0,4 & \text{se } i(1,2) = i_2(1,2) \\ 0,2 & \text{se } i(1,2) = i_1(1,2) \end{cases}$

Tutte le volatilità sono espresse su base annua.

L'evoluzione della struttura per scadenza è individuata dal seguente albero:



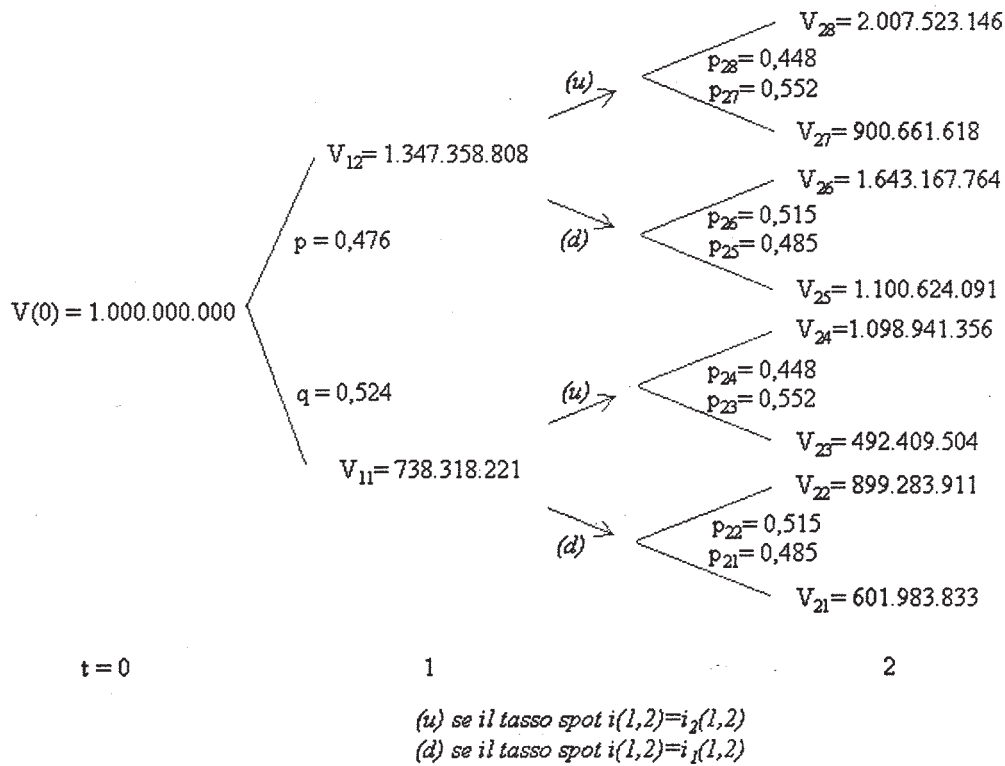
Relativamente al primo *step* l'evoluzione del valore dell'azienda viene determinata con il modello di Cox-Ross-Rubinstein [6] in cui le probabilità *up* e *down* sono individuate da:

$$p = \frac{1 + i(0,1) - e^{-\sigma_V(0,1)}}{e^{\sigma_V(0,1)} - e^{-\sigma_V(0,1)}}; \quad q = 1 - p \quad (2)$$

Indicando con V_{1j} per $j=1, 2$ i due possibili valori ottenuti per l'azienda alla fine del primo periodo si vengono ad individuare otto possibili valori V_{2s} ($s = 1, \dots, 8$) dell'azienda alla fine del secondo periodo. Le probabilità *risk neutral* associate a tali determinazioni dipenderanno sia dal valore assunto dal tasso *spot* futuro sia dalla volatilità ipotizzata per il rendimento e saranno indicate con p_{2s} . In generale si potrà ancora utilizzare per la loro determinazione una formulazione equivalente alla (2) in cui $i(0,1)$ è sostituito da $i_j(1,2)$, $j=1, 2$ dell'albero di BDT e $\sigma_V(0,1)$ sarà sostituito dal valore della volatilità ipotizzato in corrispondenza ad ogni determinazione assunta dal tasso.

Le probabilità *risk neutral* relative ai possibili valori a scadenza dell'azienda vengono così a dipendere dall'evoluzione della struttura per scadenza.

Si riporta a seguire l'albero relativo all'evoluzione del valore dell'azienda e le probabilità di salita e di discesa relative ad ogni nodo.



Le condizioni da imporre a scadenza per valutare il titolo convertibile dovranno tenere conto della possibilità di conversione; pertanto, indicato con OC_{2s} il valore dell'obbligazione convertibile al tempo $t = 2$ e nello stato di natura $s = 1, \dots, 8$ risulterà:

$$OC_{2s} = \max \left\{ C; k \frac{V_{2s}}{mk + n} \right\} \quad \text{per } s = 1, \dots, 8 \quad (3)$$

essendo, in tale istante, concessa al sottoscrittore la scelta tra la conversione e la riscossione del valore nominale C del titolo (si ipotizza che le cedole in conto interesse se il titolo è portato a scadenza vengano comunque corrisposte).

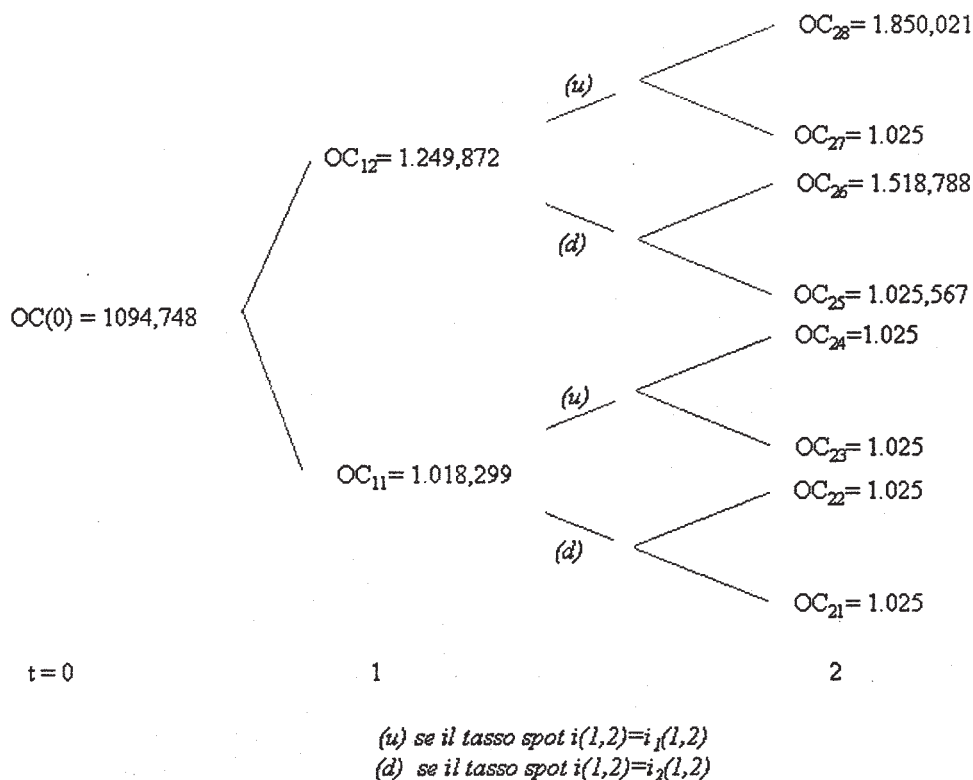
Nell'istante intermedio $t = 1$ considerata la possibilità di richiamo da parte dell'ente emittente, indicato con OC_{1s} , con $s = 1, 2$ il valore dell'obbligazione convertibile sarà invece:

$$OC_{11} = \begin{cases} \max \left\{ K, k \frac{V_{11}}{mk + n} \right\} & \text{se l'obbligazione viene richiamata} \\ \max \left\{ k \frac{V_{11}}{mk + n}, \frac{1}{2} \left(\frac{OC_{21}P_{21} + OC_{22}P_{22}}{1 + i_1(1,2)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{OC_{23}P_{23} + OC_{24}P_{24}}{1 + i_2(1,2)} \right) \right\} & \text{se l'obbligazione non viene richiamata} \end{cases} \quad (4)$$

$$OC_{12} = \begin{cases} \max\left\{K, k \frac{V_{12}}{mk+n}\right\} & \text{se l'obbligazione viene richiamata} \\ \max\left\{k \frac{V_{12}}{mk+n}, \frac{1}{2}\left(\frac{OC_{25}P_{25} + OC_{26}P_{26}}{1+i_1(1,2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{OC_{27}P_{27} + OC_{28}P_{28}}{1+i_2(1,2)}\right)\right\} & \text{se l'obbligazione non viene richiamata} \end{cases} \quad (5)$$

In tal caso infatti il sottoscrittore potrà decidere liberamente se convertire o no solo nel caso in cui l'obbligazione non viene richiamata

Il valore del convertibile nell'istante iniziale si determina utilizzando tali condizioni ed il classico procedimento *backward*.



4. Analisi di sensitività

La struttura del modello proposto si presta ad analizzare l'influenza della volatilità per il rendimento dell'azienda e dello *spot rate* sul prezzo dell'obbligazione convertibile.

L'analisi qui effettuata segue due direzioni: nella prima, mantenendo costante la volatilità del tasso *spot* futuro, si esamina l'impatto che diverse strutture di volatilità ipotizzate per il rendimento dell'azienda hanno sul prezzo del convertibile, nella seconda si analizza come la volatilità dei tassi a

pronti futuri influenzi il prezzo dell'obbligazione; questa seconda analisi appare essenziale ai fini di stabilire la bontà del modello suggerito.

Come si può osservare dalla Tabella 1, mantenendo costante la volatilità dei tassi a pronti $\sigma(1,2)$, la volatilità del rendimento dell'azienda, in questo esempio, influenza fortemente il prezzo dell'obbligazione convertibile.

In particolare aumenti (riduzioni) generalizzati della volatilità del rendimento dell'azienda in ogni istante e in ogni stato inducono aumenti (riduzioni) del prezzo dell'obbligazione convertibile.

TABELLA 1				
$\sigma(1,2)$	$\sigma_V(0,1)$	$\sigma_V(1,2)$ up	$\sigma_V(1,2)$ down	OC(0)
0,19	0,3	0,4	0,2	1.094,748
0,19	0,4	0,7	0,5	1.141,304
0,19	0,2	0,1	0,05	1.046,429

I risultati riportati nella Tabella 2 evidenziano invece, come nel caso considerato, il prezzo dell'obbligazione convertibile possa non essere influenzato in maniera determinante dalla volatilità dei tassi inserita all'interno al modello di BDT; infatti, tenendo costante la struttura di volatilità del rendimento dell'azienda e facendo variare la volatilità dei tassi, il prezzo del convertibile o si mantiene costante o varia di poco.

TABELLA 2				
$\sigma(2)$	$\sigma_V(1)$	$\sigma_V(2)$ up	$\sigma_V(2)$ down	OC(0)
0,09	0,35	0,6	0,1	1.118,202
0,19	0,35	0,6	0,1	1.118,202
0,29	0,35	0,6	0,1	1.118,202
0,09	0,35	0,1	0,6	1.159,399
0,19	0,35	0,1	0,6	1.159,524
0,29	0,35	0,1	0,6	1.159,644

La forte dipendenza del prezzo del convertibile dalla volatilità del rendimento dell'azienda è da imputarsi alla influenza che essa ha sul valore dell'opzione di conversione. La bassa sensibilità del prezzo a variazioni della volatilità dei tassi a pronti futuri supporta l'utilizzo per l'evoluzione della struttura per scadenza del modello di BDT.

5. Modello continuo

Il modello continuo qui proposto è una generalizzazione del caso discreto sopra esaminato. Le variabili stocastiche da cui il prezzo dell'obbligazione convertibile dipende in questo ambito sono determinate dallo *spot rate* $r(t)$ e dal valore dell'azienda $V(t)$ e si ipotizza che entrambe seguano un processo stocastico di tipo lognormale regolato dalle seguenti equazioni:

$$dr = r\mu_r dt + r\sigma_r(t)dz_1 \quad (6)$$

$$dV = Vr(t)dt + V\sigma_V dz_2 \quad (7)$$

dove $r\mu_r dt$ e $r^2\sigma_r^2 dt$ sono rispettivamente l'incremento medio e la varianza dello *spot rate* sull'intervallo infinitesimo dt , $Vr(t)dt$ e $V^2\sigma_V^2 dt$ sono rispettivamente, in ambito *risk neutral*, l'incremento medio e la varianza del valore dell'azienda sull'intervallo infinitesimo dt , dz_1 e dz_2 sono processi di Wiener fra loro correlati con coefficiente di correlazione ρ e tali che $E(dz_1 dz_2) = \rho dt$.

Essendo il modello evolutivo di $r(t)$ *no arbitrage* non sono richieste informazioni relative alle preferenze degli operatori sul mercato.

Il prezzo dell'obbligazione convertibile in questo ambito viene determinato mediante simulazione Monte Carlo.

L'implementazione della simulazione non è immediata in quanto:

- a) vista la dipendenza fra i processi di Wiener dz_1 e dz_2 al fine di generare variabili aleatorie correlate è stata utilizzata la decomposizione di Cholesky che consente di generare variabili aleatorie distribuite normalmente e tra loro correlate facendo riferimento a variabili aleatorie indipendenti. Se si indicano con X_1 e X_2 due variabili aleatorie distribuite secondo una normale standard e tra loro indipendenti, si può scrivere:

$$dz_1 = X_1 \sqrt{dt} \quad (8)$$

$$dz_2 = X_1 \rho \sqrt{dt} + X_2 \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{dt} \quad (9)$$

- b) Il particolare modello dell'evoluzione dello *spot rate* non consente di ottenere in forma chiusa i fattori di sconto $v(t,s)$. Gli stessi sono stati approssimati su ogni *path* facendo riferimento alla formula di Cavalieri-Simpson che permette, una volta noti i valori di $r(t)$ al tempo t e al tempo s , di esprimere:

$$v(t,s) \cong \exp \left[- \frac{(r(s) + r(t))(s - t)}{2} \right] \quad (10)$$

- c) Le opzioni incorporate nel titolo convertibile sono in genere o *bermudan option* o opzioni americane, per le quali la valutazione con il metodo Monte Carlo va effettuata facendo rife-

rimento alla procedura suggerita da Tilley² [13]. La griglia temporale da scegliere per l'evoluzione dello *spot rate* e del valore dell'azienda deve incorporare le date di stacco cedola e le date di richiamo e conversione e nel caso di opzioni americane deve essere abbastanza fitta. L'opzione di richiamo richiede un ulteriore adattamento di tale metodologia alle obbligazioni convertibili che consenta di esaminare separatamente quei *path* nei quali l'obbligazione viene richiamata anticipatamente.

- d) La valutazione dell'obbligazione convertibile non può prescindere dal calcolo del valore attuale delle cedole corrisposte in conto interesse durante la vita del contratto. Il fattore di attualizzazione utilizzato per scontare tali importi è determinato come media dei fattori di attualizzazione relativi alle scadenze in cui tali cedole vengono corrisposte.

6. Risultati della simulazione per il modello continuo

In questo paragrafo si vuole verificare quale impatto abbiano sul prezzo del convertibile la struttura della volatilità dei tassi e il coefficiente di correlazione ρ .

Per analizzare l'impatto dovuto alla volatilità della struttura per scadenza sono state considerate due ipotesi distinte relative alla funzione $\sigma_r(t)$ che figura come fattore del coefficiente di diffusione dello *spot rate*. Nel primo caso si è ipotizzato per $\sigma_r(t)$ un andamento costante che implica per l'evoluzione del logaritmo dello *spot rate* una rappresentazione tramite un processo di Wiener.

Nel secondo caso si è ipotizzato che $\sigma_r(t)$ abbia un andamento *time decaying* che porta il logaritmo dello *spot rate* ad avere un andamento *mean reverting*.

1° caso

Prendendo in considerazione un'obbligazione convertibile che ha le stesse caratteristiche contrattuali di quella a cui si fa riferimento nel modello discreto e ipotizzando che siano assegnati su base annua i valori:

- $r(0) = 0,03$
- $\sigma_r(t) = 0,05$
- $\mu_r = 0,02$
- $\mu_v = 0,1$
- $\sigma_v = 0,3$

siano dati:

- $V_0 = 1$ miliardo di euro
- numero degli step = 2
- $\rho = -0,5$

² L'algoritmo punta a ricondurre l'evoluzione ottenuta per il valore del sottostante mediante simulazione Monte Carlo ad una evoluzione simile a quella ottenuta mediante alberi binomiali standard. Esso è basato sul riordinamento del valore del sottostante in corrispondenza di ogni istante temporale e del conseguente raggruppamento in sottoinsiemi.

fine di stabilire il valore di conversione dell'obbligazione convertibile, sarà necessario sottrarre al valore $V(t)$ il debito residuo da imputare a tali prestiti istante per istante.

Il modello continuo qui proposto si differenzia da quello di Brennan-Schwartz [4] per la scelta del processo adottato per l'evoluzione dello *spot rate* e per la metodologia suggerita per la determinazione del prezzo del convertibile.

In [4] il prezzo del convertibile è determinato risolvendo per via numerica l'equazione alle derivate parziali di valutazione; la sua determinazione può essere effettuata solo subordinatamente ad imposizioni di condizioni al contorno alcune delle quali non sono sempre facilmente ed univocamente determinabili e alla introduzione del prezzo di mercato del rischio. Tali grandezze introducono nel modello elementi di soggettività che potrebbero influenzare in maniera determinante la valutazione.

La procedura Monte Carlo qui suggerita evita tale problema.

rimento alla procedura suggerita da Tilley² [13]. La griglia temporale da scegliere per l'evoluzione dello *spot rate* e del valore dell'azienda deve incorporare le date di stacco cedola e le date di richiamo e conversione e nel caso di opzioni americane deve essere abbastanza fitta. L'opzione di richiamo richiede un ulteriore adattamento di tale metodologia alle obbligazioni convertibili che consenta di esaminare separatamente quei *path* nei quali l'obbligazione viene richiamata anticipatamente.

- d) La valutazione dell'obbligazione convertibile non può prescindere dal calcolo del valore attuale delle cedole corrisposte in conto interesse durante la vita del contratto. Il fattore di attualizzazione utilizzato per scontare tali importi è determinato come media dei fattori di attualizzazione relativi alle scadenze in cui tali cedole vengono corrisposte.

6. Risultati della simulazione per il modello continuo

In questo paragrafo si vuole verificare quale impatto abbiano sul prezzo del convertibile la struttura della volatilità dei tassi e il coefficiente di correlazione ρ .

Per analizzare l'impatto dovuto alla volatilità della struttura per scadenza sono state considerate due ipotesi distinte relative alla funzione $\sigma_r(t)$ che figura come fattore del coefficiente di diffusione dello *spot rate*. Nel primo caso si è ipotizzato per $\sigma_r(t)$ un andamento costante che implica per l'evoluzione del logaritmo dello *spot rate* una rappresentazione tramite un processo di Wiener.

Nel secondo caso si è ipotizzato che $\sigma_r(t)$ abbia un andamento *time decaying* che porta il logaritmo dello *spot rate* ad avere un andamento *mean reverting*.

1° caso

Prendendo in considerazione un'obbligazione convertibile che ha le stesse caratteristiche contrattuali di quella a cui si fa riferimento nel modello discreto e ipotizzando che siano assegnati su base annua i valori:

- $r(0) = 0,03$
- $\sigma_r(t) = 0,05$
- $\mu_r = 0,02$
- $\mu_v = 0,1$
- $\sigma_v = 0,3$

siano dati:

- $V_0 = 1$ miliardo di euro
- numero degli step = 2
- $\rho = -0,5$

² L'algoritmo punta a ricondurre l'evoluzione ottenuta per il valore del sottostante mediante simulazione Monte Carlo ad una evoluzione simile a quella ottenuta mediante alberi binomiali standard. Esso è basato sul riordinamento del valore del sottostante in corrispondenza di ogni istante temporale e del conseguente raggruppamento in sottoinsiemi.

Indicati con: N il numero dei *path* simulati, ρ il coefficiente di correlazione, N_{CAS} il numero dei cammini in cui avviene la conversione anticipata spontaneamente, N_{RA} il numero dei cammini in cui avviene il richiamo anticipato e con $OC(0)$ il prezzo del convertibile al tempo 0 espresso in euro, nella Tabella 3 si riportano i risultati della simulazione effettuata:

TABELLA 3				
N	ρ	N_{CAS}	N_{RA}	$OC(0)$
10.000	-0,5	186	3.657	1.092,001

2° caso

I dati in input si differenziano dal caso precedente solo per la scelta della funzione $\sigma_r(t)$ che per tenere conto della dipendenza dal tempo è individuata dalla seguente espressione:

$$\sigma_r(t) = 0,05 \exp(-\lambda t) \quad \lambda > 0 \quad (11)$$

Per isolare l'influenza del coefficiente di decadimento λ sul prezzo del convertibile è stata fissata una particolare generazione di valori casuali e si è determinato, al variare di λ , il prezzo del convertibile. Nella Tabella 4 si riportano le valutazioni effettuate, in corrispondenza a valori di λ distanziati di 0,5 unità.

TABELLA 4		
λ	ρ	$OC(0)$
0,5	-0,5	1.091,995
1	-0,5	1.091,959
1,5	-0,5	1.091,976
2	-0,5	1.091,912
2,5	-0,5	1.091,906
3	-0,5	1.091,904

I risultati ottenuti, come nel modello discreto, non mostrano una dipendenza sensibile del valore del convertibile dal coefficiente di decadimento λ e quindi dalla struttura di volatilità dello *spot rate*.

Per analizzare la dipendenza del prezzo del convertibile dal coefficiente di correlazione ρ è stata utilizzata la stessa generazione di numeri casuali dei casi precedenti e, facendo riferimento agli input utilizzati nel primo caso, si è calcolato il prezzo del convertibile in corrispondenza a valori di ρ distanziati di 0,25. I risultati ottenuti sono esposti nella Tabella 5.

rimento alla procedura suggerita da Tilley² [13]. La griglia temporale da scegliere per l'evoluzione dello *spot rate* e del valore dell'azienda deve incorporare le date di stacco cedola e le date di richiamo e conversione e nel caso di opzioni americane deve essere abbastanza fitta. L'opzione di richiamo richiede un ulteriore adattamento di tale metodologia alle obbligazioni convertibili che consenta di esaminare separatamente quei *path* nei quali l'obbligazione viene richiamata anticipatamente.

- d) La valutazione dell'obbligazione convertibile non può prescindere dal calcolo del valore attuale delle cedole corrisposte in conto interesse durante la vita del contratto. Il fattore di attualizzazione utilizzato per scontare tali importi è determinato come media dei fattori di attualizzazione relativi alle scadenze in cui tali cedole vengono corrisposte.

6. Risultati della simulazione per il modello continuo

In questo paragrafo si vuole verificare quale impatto abbiano sul prezzo del convertibile la struttura della volatilità dei tassi e il coefficiente di correlazione ρ .

Per analizzare l'impatto dovuto alla volatilità della struttura per scadenza sono state considerate due ipotesi distinte relative alla funzione $\sigma_r(t)$ che figura come fattore del coefficiente di diffusione dello *spot rate*. Nel primo caso si è ipotizzato per $\sigma_r(t)$ un andamento costante che implica per l'evoluzione del logaritmo dello *spot rate* una rappresentazione tramite un processo di Wiener.

Nel secondo caso si è ipotizzato che $\sigma_r(t)$ abbia un andamento *time decaying* che porta il logaritmo dello *spot rate* ad avere un andamento *mean reverting*.

1° caso

Prendendo in considerazione un'obbligazione convertibile che ha le stesse caratteristiche contrattuali di quella a cui si fa riferimento nel modello discreto e ipotizzando che siano assegnati su base annua i valori:

- $r(0) = 0,03$
- $\sigma_r(t) = 0,05$
- $\mu_r = 0,02$
- $\mu_v = 0,1$
- $\sigma_v = 0,3$

siano dati:

- $V_0 = 1$ miliardo di euro
- numero degli step = 2
- $\rho = -0,5$

² L'algoritmo punta a ricondurre l'evoluzione ottenuta per il valore del sottostante mediante simulazione Monte Carlo ad una evoluzione simile a quella ottenuta mediante alberi binomiali standard. Esso è basato sul riordinamento del valore del sottostante in corrispondenza di ogni istante temporale e del conseguente raggruppamento in sottoinsiemi.

Indicati con: N il numero dei *path* simulati, ρ il coefficiente di correlazione, N_{CAS} il numero dei cammini in cui avviene la conversione anticipata spontaneamente, N_{RA} il numero dei cammini in cui avviene il richiamo anticipato e con $OC(0)$ il prezzo del convertibile al tempo 0 espresso in euro, nella Tabella 3 si riportano i risultati della simulazione effettuata:

TABELLA 3				
N	ρ	N_{CAS}	N_{RA}	$OC(0)$
10.000	-0,5	186	3.657	1.092,001

2° caso

I dati in input si differenziano dal caso precedente solo per la scelta della funzione $\sigma_r(t)$ che per tenere conto della dipendenza dal tempo è individuata dalla seguente espressione:

$$\sigma_r(t) = 0,05 \exp(-\lambda t) \quad \lambda > 0 \quad (11)$$

Per isolare l'influenza del coefficiente di decadimento λ sul prezzo del convertibile è stata fissata una particolare generazione di valori casuali e si è determinato, al variare di λ , il prezzo del convertibile. Nella Tabella 4 si riportano le valutazioni effettuate, in corrispondenza a valori di λ distanziati di 0,5 unità.

TABELLA 4		
λ	ρ	$OC(0)$
0,5	-0,5	1.091,995
1	-0,5	1.091,959
1,5	-0,5	1.091,976
2	-0,5	1.091,912
2,5	-0,5	1.091,906
3	-0,5	1.091,904

I risultati ottenuti, come nel modello discreto, non mostrano una dipendenza sensibile del valore del convertibile dal coefficiente di decadimento λ e quindi dalla struttura di volatilità dello *spot rate*.

Per analizzare la dipendenza del prezzo del convertibile dal coefficiente di correlazione ρ è stata utilizzata la stessa generazione di numeri casuali dei casi precedenti e, facendo riferimento agli input utilizzati nel primo caso, si è calcolato il prezzo del convertibile in corrispondenza a valori di ρ distanziati di 0,25. I risultati ottenuti sono espstii nella Tabella 5.

TABELLA 5			
ρ	N_{CAS}	N_{RA}	$OC(0)$
-1	202	3.667	1.091,431
-0,75	203	3.636	1.092,746
-0,5	186	3.657	1.092,001
-0,25	196	3.658	1.091,096
0	184	3.685	1.091,432
0,25	192	3.676	1.091,982
0,5	243	3.678	1.091,855
0,75	257	3.703	1.093,066
1	285	3.722	1.093,430

Dai dati riportati si constata che nel caso esaminato l'errore massimo che si commette qualora si trascuri la dipendenza tra i processi stocastici considerati non supera il 2,5%.

7. Conclusioni

Come tutti i modelli proposti in letteratura per la valutazione di obbligazioni convertibili anche i modelli che vengono suggeriti in questo lavoro sono abbastanza onerosi dal punto di vista computazionale. Le complicazioni legate alla valutazione sono da imputare sia alle clausole di conversione che di richiamo contenute in tali titoli sia al numero di fonti di incertezza assunte alla base del modello. E' ovvio che in ipotesi di due fonti di incertezza i calcoli siano più complessi. I modelli in cui l'evoluzione della struttura per scadenza è aleatoria, del tipo di quelli considerati, tuttavia, necessitando di una calibratura fatta in base ai prezzi degli *z.c.b.* presenti sul mercato, offrono il vantaggio di valutazioni che poggiano su una base informativa più ampia rispetto a quelli in cui la struttura per scadenza è ipotizzata piatta.

Dal punto di vista applicativo i modelli proposti possono essere utilizzati per valutare obbligazioni convertibili in ipotesi meno restrittive rispetto a quelle adottate in questa indagine relativamente alla composizione delle passività dell'azienda. In particolare tali modelli possono essere adottati anche nell'ipotesi in cui l'azienda si sia finanziata oltre che con obbligazioni convertibili anche con obbligazioni standard. In questo caso per la valutazione del titolo convertibile si dovrà utilizzare una griglia temporale in cui siano inseriti gli istanti in cui avviene il pagamento delle cedole e il rimborso del valore nominale di entrambe le tipologie di obbligazioni considerate. Questo consente di tenere conto dell'abbattimento del valore dell'azienda subito per effetto di tali pagamenti. Inoltre, non rientrando il debito obbligazionario standard nel capitale proprio dell'azienda, al

fine di stabilire il valore di conversione dell'obbligazione convertibile, sarà necessario sottrarre al valore $V(t)$ il debito residuo da imputare a tali prestiti istante per istante.

Il modello continuo qui proposto si differenzia da quello di Brennan-Schwartz [4] per la scelta del processo adottato per l'evoluzione dello *spot rate* e per la metodologia suggerita per la determinazione del prezzo del convertibile.

In [4] il prezzo del convertibile è determinato risolvendo per via numerica l'equazione alle derivate parziali di valutazione; la sua determinazione può essere effettuata solo subordinatamente ad imposizioni di condizioni al contorno alcune delle quali non sono sempre facilmente ed univocamente determinabili e alla introduzione del prezzo di mercato del rischio. Tali grandezze introducono nel modello elementi di soggettività che potrebbero influenzare in maniera determinante la valutazione.

La procedura Monte Carlo qui suggerita evita tale problema.

Riferimenti bibliografici

- [1] BLACK, F., DERMAN E., TOY W., *A One-Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options*, Financial Analysts Journal, January/February 1990.
- [2] BOYLE, P., BROADIE M., GLASSERMAN P., *Monte Carlo methods for security pricing*, Journal of Economic Dynamics and Control, vol. 21, 1997, p. 1267-1321.
- [3] BRENNAN, M.J., SCHWARTZ E.S., *Convertible Bonds: Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion*, The Journal of Finance, vol. XXXII, n. 5, December 1977, p. 1699-1715.
- [4] BRENNAN, M.J., SCHWARTZ E.S., *Analysing Convertible Bonds*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. XV, n. 4, November 1980, p. 907-929.
- [5] CENCI M., GHENO A., *Obbligazioni convertibili: conflitto di interessi o gioco cooperativo?*, Contabilità, Finanza e Controllo, n.6, giugno 2000.
- [6] COX, J. C., RUBINSTEIN M., *Options markets*, Prentice-Hall, New York, 1985.
- [7] HULL, J. C., *Options, Futures, and other derivatives* Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1997.
- [8] INGERSOLL, J., *An Examination of Corporate Call Policies on Convertible Securities*, The Journal of Finance, vol. XXXII, n. 2, May 1977, p. 463-478.
- [9] RAVINDRAN, K., *Customized Derivatives*, McGraw-Hill, New York, 1998.
- [10] REBONATO, R., *Interest Rate Option Models*, Wiley & Sons, New York, 1998.
- [11] RIPLEY, B. D., *Stochastic Simulation*, Wiley & Sons, New York, 1987.
- [12] RUBINSTEIN, M., *Return to Oz*, Risk, vol. 7, n. 11, November 1994.
- [13] TILLEY, J. A., *Valuing American Options in a Path Simulation Model*, Transactions, vol. XLV, 1998, p. 499-520.
- [14] ZHANG, P. G., *Exotic options*, World Scientific, Singapore, 1998.

WORKING PAPER PUBBLICATI

- 1 - 1997 Mariano D'Antonio e Margherita Scarlato
Struttura economica e commercio estero: un'analisi per le province italiane.
- 2 - 1997 Pierangelo Garegnani e Antonella Palumbo *Accumulation of capital.*
- 3 - 1997 Elio Cerrito
Crisi di cambio e problemi di politica monetaria nell'Italia di fine Ottocento. Appunti su alcune evidenze empiriche.
- 4 - 1998 Francesco Manni
Struttura delle fonti di finanziamento: Un'indagine sulle principali società italiane produttrici di bevande.
- 5 - 1998 J. O. Berger e J. Mortera
Default Bayes factors for one-sided hypothesis testing.
- 6 - 1998 Attilio Trezzini
Capacity utilisation in the long run: a reply to Serrano.
- 7 - 1998 A. M. Ferragina
Quality product differentiation in CEE-EU Intra-Industry trade
- 8 - 1998 M. F. Renzi, L. Cappelli, G. Salerno
Outsourcing: Opportunità e limiti per le aziende che operano con sistemi di qualità conformi alle norme ISO 9000
- 9 - 1998 Margherita Scarlato
The impact of international trade on employment and wage differentials: some evidence from the italian macro-regions
- 10 - 1998 Attilio Trezzini
Some notes on long-run capacity utilisation, steady state and induced investment
- 11 - 1999 Salvatore Monni
A Convergence analysis of human development
- 12 - 1999 Guido M. Rey
Informazione e politiche pubbliche: non è mai troppo tardi
- 13 - 2000 Maria Maddalena Barbieri e Caterina Conigliani
Fractional bayes factors for the analysis of autoregressive models with possible unit roots
- 14 - 2000 Margherita Scarlato
Capitale Sociale e Sviluppo Economico
- 15 - 2000 Anna M. Ferragina
Price versus quality competition in Italy's trade with Central and Eastern Europe over the Transition
- 16 - 2000 Mariano D'Antonio e Margherita Scarlato
*Capitale umano e sviluppo economico
Un modello di equilibrio economico generale per il Centro-Nord e il Mezzogiorno d'Italia*

- 17 - 2000 Marisa Cenci e Luana Foffo Ciucci
Gli effetti della regolamentazione sull'attività di Insider Trading
- 18 - 2000 Andrea Gheno
Alberi binomiali e struttura della volatilità
- 19 - 2000 Marisa Cenci
Modelli per la struttura a termine con volatilità stocastica (Una rassegna critica)
- 20 - 2000 Marisa Cenci e Andrea Gheno
Metodologie per la valutazione delle obbligazioni convertibili in ipotesi di evoluzione stocastica della struttura per scadenza

Finito di stampare nel mese di agosto 2000, presso
Tipolitografia artigiana Colitti Armando snc di *Colitti Marco & C.*
00154 Roma • Via Giuseppe Libetta 15 a • Tel. 065745311 / 065740258
e-mail tolitti@tin.it • www.colitti.it